博奕论

〔日〕宫厍光一 著

上海科学技术出版社

博 弈 論

〔日〕宫澤光一 著
張 毓 椿 譯

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分四章，第一章博奕的构造，重点介紹效用函数概念，作为以后的准备。第二、三章2人零和博奕，分别就純策略和混合策略的范圍进行了扼要的討論，最后一章非零和博奕，对合作博奕及Nash理論作了一般性的介紹。本书可供数学工作者，經济工作者及科学研究人員作参考。

現代应用数学丛书

博　奕　論

原书名　ゲームの理論
原著者　〔日〕宮澤光一
原出版社　岩波书店，1958
譯　者　張毓椿

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印張2 22/32　字数62,000
1963年5月第1版　1963年5月第1次印刷
印数 1—6,050

統一书号：13119·322
定　价：(十四) 0.48元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

序

1928 年 von Neumann 在論文 "Zur Theorie der Gesellshaftsspiele" (Math. Annalen, vol. 100) 中的想法，到 1944 年在他和 Morgenstern 合著的 "Theory of Games and Economic Behavior" 一书以及該书 1947 年的第二版中形成了 2 人零和博奕的理論。从此出发，以 n 人博奕的結构分析为中心，建立了完整的体系。这一理論所研究的不是魯濱逊飄流在无人島上的行动，而是現实社会中彼此相互影响的各种活动的合理規律。当然可以想象，这一理論对于人类与自然界的斗爭，社会經济活动，軍事作战等方面都能应用。但是，从实际問題中抽象出来的博奕理論，在应用于实际問題时，由于現实情况远較博奕模型为复杂，因此还有很大困难。所以在开始时，博奕論似乎并沒有重大的現实意义。

尽管如此，人們把难以掌握的竞爭活动的本质加以抽象化，終究是一項重要的成果。自从 1947 年到現在，又过去十余年了。在这期間，随着科学技术的迅速发展，博奕論也越来越与現实問題相接近。由于大型电子計算机的建立，高速計算工具的发展使复杂的博奕問題逐步具备求解的可能性。

1950 年出版了 "Contributions to the Theory of Games" 第 1 卷 (Annals of Math. Studies, Princeton)，1953 年出版了第 2 卷，1957 年出版了第 3 卷，現在第 4 卷亦已出版。特别是，由于最近运筹学的迅速发展，正表明博奕論在逐步发揮它的眞正作用。此外，在 1957 年末，Luce 和 Raiffa 合写了 "Games and Decisions" 一书，其中有詳細的文献目录，大有参考价值。

在博奕論正取得显著发展的时期，这本小册子的問世似乎是

适时的。作者认为2人零和博奕是最基本的，所以是要写的一个重点。但如不先明确效用的理論，就似乎很难讲透，因此先对效用作了簡洁的介紹。

要想从基本的一直介紹到現代成果，卽使仅就2人博奕而論也要占去很多的篇幅，何况n人博奕与非零和博奕的研究已远較1947年时期有了更大的发展。如果不接触到这些内容，又显示不出反映現代博奕理論的意图。因此，这里仅对博奕論中的合作关系以及Nash的理論作了一般性的介紹，开始接触到近代的理論。

最后，希望通过数学家和实际工作者的合作，大大促进博奕論的研究。

宫澤光一

1958年1月

目　录

第1章 博奕的构造

§1 博奕的規則

考虑由几个行动主体参加的竞爭。各主体都希望根据自己选定的方式来决定使自己能收到最大效果的行动方針。所謂竞爭，其意义就是各主体行动的結果不仅取决于自己的行动，而且还取决于其他主体的行动。同时，各主体的目的必須是互不相容或相互对抗的。在这种情况下，各主体的最好行动是什么，以及当各主体采取了在某种意义下最好的行动时，事态通过怎样的形式才能稳定，所有这些問題用数学方法来加以闡明，这就是 von Neumann 和 Morgenstern[7] 所創始的博奕理論。为此，有必要将支配竞爭的因素加以抽象化，并将这些因素的相互关系表为数学模型。由于室內游戏可看作是竞爭的最簡单例子，在此試先把它博奕模型化。

博奕是以几組規則作为特征的。它的規則中首先是指出参加博奕的主体（称为**局中人**）的数目，同时要指出**步法**（move）的序列。步法有两种：(i) 某特定局中人在允許的**选擇事項**（alternatives）中决定选擇其中一个而得的步法（如在奕棋中走一步棋子），(ii) 不由局中人而由某一特定的机遇装置机械地从选擇事項中选定一項的步法（如在桥牌游戏中分給各局中人一定的牌数）。前者称为**人的**步法（personal move），后者称为机遇步法（chance move）。在人的步法时，选出的选擇事項称为**着**（choice），在机遇步法中出現的选擇事項称为**运**（outcome）。

博奕的規則构成如下：对于步法，要求 (a) 指出是人的步法还是机遇步法；(b) 若是人的步法，指出哪个局中人所选擇的步法

以及当时允許选擇事項的集合是什么；(c)若是机遇步法，指明可能出現的运的集合以及各运能出現的概率。象这样，若直到第$(k-1)$ $(k>1)$步法以前的所有步法都已經指明时，下一步对于作为前$(k-1)$个步法的着和运的函数的第k步法，要指出：(a)第k步法是人的步法还是机遇步法；(b)若为机遇步法，可能出現的运的集合和运出現的概率如何；(c)若为人的步法，可选擇事項的集合如何，是哪个局中人的步法，另外还要指出局中人选擇这一着时，一切能够获得的关于前$(k-1)$个步法中所实現的着和运的信息。

最后，博奕的规则还要指出每个步法作为着与运的函数，博奕在何时終了，博奕在終了时，其成果是甚么。这里总假定博奕經过有限次的步法終了。根据以上的博奕規則，博奕到終了的某一次具体实現称为**局**(play)。

§2　博奕的树

博奕可用图形表示。設局中人i的某个步法允許在三个选擇事項中进行选取。将各选擇事項用由同一点出发，方向向上而端点在同一水平上的綫段表示，此时这个步法的状态如图2.1。但是各步法用图2.1的图形表現时，博奕步法的意义是不明显的。博奕各个步法的意义主要在于它和其他步法的結合关系。因此各步法除用图2.1表示外，还必須表示各步法的着或者运与其他步法的結合关系。这样，博奕可用图2.2所示依次向上的綫段的連接体表示之。在此，各支点只由一个分支与低一級的一个支点連接，最低的支点只有一个，它表示第一步法。这样的图形称为**博奕的树**(game tree)。各等高排列的支点表示各个步法，由下而上順次称为第一步法，第二步法等等。各支点所标的数字1, 2, …, n表示其步

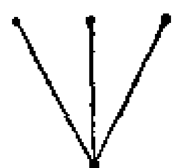


图　2.1

法是人的步法，且分别为局中人 1, 2, …, n 的步法。支点所标的数字若是 0, 则表示其为机遇步法。这样，在这个树上，分支終点的各点(即由此不再有分支的点称为树的**頂点**)表示博奕的終結。

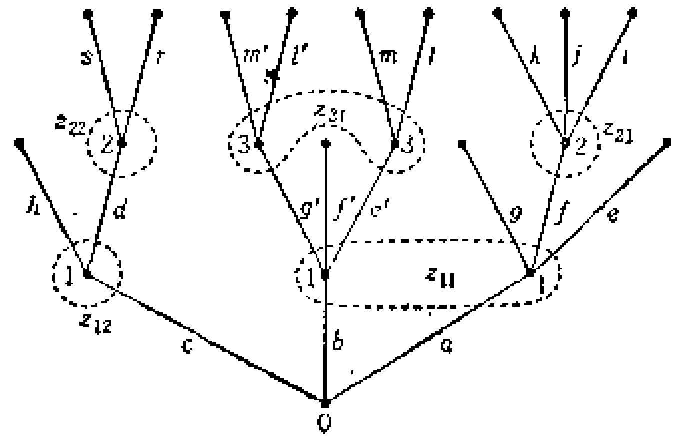


图 2.2

我們根据博奕的树来看一下图 2.2 所表示的博奕。第一步法是机遇步法，在此处假定由指定的机遇装置得出的运是 b. 第二步法是局中人 1 的步法。若局中人选取 f', 則局終結。若局中人 1 选取 e', 則第三步法是局中人 3 的步法，在此，局中人 3 选取 l 或 m 而局終結。

这样，博奕的各局在博奕树上就表現为由最低的唯一的支点出发，經一些路綫而到达各分支的頂点，而且这样的路綫和博奕树的頂点是一一对应的。因此，博奕的可能的局的数目，就等于博奕树的頂点的数目。例如图 2.2 的树所表示的博奕，其局的总数是 13.

其次，各局中人在选擇他的步法时，根据博奕的規則，对于以前局中的过程持有一定的信息。这信息也希望能在图上表示。我們看一下图 2.2, 把相当于人的步法的支点全体的集合分成用点綫围成的子集合 z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} 和 z_{31}. 这些子集合 z_{ij} 的全体用 Z 表示。例如支点集合 z_{11} 的意义是：局中人 1 知道第一步法取 a 或 b 时，第二步法是局中人 1 的步法，但是他所知道的也仅限于此，因为他不能知道第一步法到底取 a 还是取 b, 所以也不知道自己現在位于第二步法的哪一点上，也就是說，他还不能判断自己位于集合 z_{11} 所含两个支点中的哪一个上。但这时局中人 1 知道在此

步法上自己可选取的事项是 e, f 和 g 三个。在集合 z_{11} 的另一支点，有用 e', f', g' 表示的可选取的分支，作为选擇事項来說，規定 $e=e', f=f', g=g'$. 这里对另一个选擇事項标以"′"，只是为了表示它是由不同的支点生出的。z_{11} 含有两个支点，如前所述，在第二步法，局中人1仅知道第一步法取 a 或 b，但究竟取其中的哪一个是不知道的，从而局中人1不能判断 e 和 e'，f 和 f'，g 和 g'. 也就是說，他只知道現在或是位于分支 a 的終止支点，要在 e, f, g 中进行选擇，或是位于分支 b 的終止支点，要在 e, f, g (即图中的 e', f', g') 中进行选擇。支点集合 z_{12} 仅有一个支点，这是說局中人1完全知道第一步法取 c，第二步法是局中人1的步法，并且同时表示位于这个步法的局中人1的可选擇事項是 d 或 h. 其他集合 z_{ij} 所表示的意义也相同。

这样，对应于人的步法的支点全体的集合所分成的子集合 z_{ij}，可以表示博奕規則所給出的信息。这种集合 z_{ij} 称为**信息集合** (information set)。信息集合中所含的支点愈多，信息愈少；支点愈少，信息愈多。例如信息集合 z_{21} 仅含有一个支点，所以这时，在此步法的局中人2完全知道第一步法取 a，第二步法取 f，現在自己是处于第三步法上，且将从 i, j, k 中进行选擇。也就是信息集合 z_{21} 表示了局中人2知道自己位于这个步法，以及关于局的以前过程的完全信息。若某个博奕的所有信息集合都只有一个支点，这种博奕特别地称为**完全信息博奕** (perfect-information game) (如象棋，圍棋等)。

博奕树中对应于人的步法支点全体的集合的任一分割 $Z=\{z_{ij}\}$，要使其具有信息集合的性质，必須滿足一定的条件。我們要求的条件是：(1) 信息集合 z_{ij} 所含的各支点属于同一局中人 i 的步法；(2) 同一集合中各支点分出的分支数目相等；(3) 任何信息集合 z_{ij} 不能含有一个局的两个不同步法的支点，也就是，設 v_1

含于 z_{ij} 中，若支点 v_2 可由 v_1 沿着博奕树的一条路綫到达，則 v_2 不含于 z_{ij} 中。（另外必須注意，将博奕規則表現在树上的方法可以不止一种。）

最后考虑作为博奕构成的另一要素，即各局結果所带来的局的成果。随着博奕規則的不同，可能有各种不同的成果。例如財物的輸贏，或单純决定胜負等等。博奕树的各頂点是局的可能終局点，这些点指出了相应的博奕的局。一般，以 t 表示这些博奕树的頂点。博奕規則还要求指出頂点集合 $\{t\}$ 与可能的成果集合 $\Omega=\{\omega\}$ 之間的一一对应关系，用 $\omega(t)$ 表示。

这样，我們可列出局中人数为 n 的博奕（称为 n **人博奕**）的規則如下：

（i）表示出各步法到其他步法的連接关系的树。

（ii）相当于机遇集合的支点和相当于人的步法的支点，以及后一集合的信息集合分割。

（iii）相当于机遇步法的支点 0 的所有可能运（即分支）的集合（表現在博奕树上），以及其上的概率分布。

（iv）給出含于信息集合中各支点上的可能着（即分支）的集合（表現在博奕树上）。

（v）給出成果集合 Ω，以及各局（即博奕树的各頂点 t）与 Ω 中元素对应的函数 $\omega(t)$。

§3 优　序

我們在前节叙述了博奕的規則可用博奕树来表示，可是并未談到博奕中局中人的作用。当然在提到人的步法是哪个局中人的步法时必須提出局中人来，但沒有涉及作为能使局进行的原动力，即局中人的行动意图。只有明确了这个問題，博奕才可以进行。事实上，对于同一規則的博奕，如果参加博奕的局中人的行动方針

不同，則竟爭結果將有很大的差异。因此必須討論各局中人对于局的成果的擇优形式的問題。

設 Ω 是成果 ω 的集合，机遇裝置使其中有限个元素 ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_n 出現的概率为 p_1，p_2，$\cdots$，p_n（在此 $p_i \geqslant 0$，$\sum p_i = 1$）。或者將概率分布称为**賭**(gamble)，用 F 或 $F = \sum p_i\omega_i$ 表示。特別給元素 ω 出現的概率为1的賭，用 ω 表示。令 Ψ 为賭的全体的集合，同时假定某个特定的主体对于 Ψ 的各元素的賭，有滿足下面条件的优序关系 $\gtrsim$：

条件(i)　(a)　对任意的 F_1，$F_2 \in \Psi$，

$F_1 \gtrsim F_2$ 或者 $F_2 \gtrsim F_1$；（两者也可同时成立。）

(b)　$F_1 \gtrsim F_2$ 且 $F_2 \gtrsim F_3$，则 $F_1 \gtrsim F_3$。

此处关系 $F_1 \gtrsim F_2$（或者写作 $F_2 \lesssim F_1$）或者表示选取的 F_1 比 F_2 好，或者表示 F_1 和 F_2 沒有差別。若 $F_1 \gtrsim F_2$ 而不是 $F_2 \gtrsim F_1$，則选取的 F_1 比 F_2 好，用 $F_1 \succ F_2$ 表示。若 $F_1 \gtrsim F_2$ 且 $F_2 \gtrsim F_1$，則 F_1 和 F_2 沒有差別，用 $F_1 \sim F_2$ 表示之。

很明显下面的各关系(1)至(3)是成立的：

(1)　关系"$\sim$"是等价关系。

(2)　对任意的 F_1，$F_2 \in \Psi$，关系 $F_1 \succ F_2$，$F_2 \succ F_1$ 或 $F_1 \sim F_2$ 中必有一个成立。

(3)　若 $F_1 \succ F_2$ 且 $F_2 \gtrsim F_3$，則 $F_1 \succ F_3$。

有限个賭 F_j $(j=1, 2, \cdots, k)$，可以按下面的意义組合起来：設

$$F_j = \sum_i p_{ij}\omega_{ij} \quad (j=1, 2, \cdots, k),$$

$\sigma_j (j=1, \cdots, k)$ 是滿足 $\sigma_j \geqslant 0$，$\sum \sigma_j = 1$ 的任意实数。$F_j (j=1, \cdots, k)$ 的組合用 $\sum \sigma_j F_j$ 表示，用下式(3.1)定义所給的賭：

$$\sum_j \sigma_j F_j = \sum_i \sum_j (\sigma_j p_{ij}) \omega_{ij}. \tag{3.1}$$

由 $\omega_{ij}\in\Omega$, $\sigma_j p_{ij}\geqslant 0$, $\sum\limits_i\sum\limits_j(\sigma_j p_{ij})=1$, 容易看出它是赌。

联系着赌的組合,假定下面条件:

条件(ii) 設 $F, G, H\in\Psi$, $0<\rho<1$, 若 $F\precsim G$, 則

$$\rho F+(1-\rho)H\precsim\rho G+(1-\rho)H \tag{3.2}$$

(在此 $\precsim$ 表示,若 $F\prec G$, 則(3.2)也是 $\prec$, 若 $F\sim G$, 則 (3.2) 也是$\sim$)。

条件 (iii) 对于 F_1, F_2, $F_3\in\Psi$, 若 $F_1\prec F_2\prec F_3$, 則存在 $0<\lambda<1$, $0<\mu<1$ 的实数 λ, μ, 滿足下面条件:

$$\lambda F_1+(1-\lambda)F_3\prec F_2, \tag{3.3}$$

$$\mu F_1+(1-\mu)F_3\succ F_2. \tag{3.4}$$

关于赌的优序关系在以上条件(i)至(iii)的假定下,得出下面的諸結果。

定理 3.1 若 $F\sim F'$, $G\sim G'$, 則对于任意实数 ρ, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, 下面关系成立:

$$\rho F+(1-\rho)G\sim\rho F'+(1-\rho)G'. \tag{3.5}$$

証明 由条件(ii),

$$\rho F+(1-\rho)G\sim\rho F'+(1-\rho)G,$$

且 $$\rho F'+(1-\rho)G\sim\rho F'+(1-\rho)G'.$$

所以由关系(1)推知(3.5)成立。　　　　証毕

定理 3.2 若 $F\prec G$ 且 $0\leqslant\sigma<\rho\leqslant 1$, 則

$$\rho F+(1-\rho)G\prec\sigma F+(1-\sigma)G. \tag{3.6}$$

証明 如果 $\sigma\neq 0$, $\rho\neq 1$, 則可作如下的变换:

$$\rho F+(1-\rho)G=(\rho-\sigma)F+\{1-(\rho-\sigma)\}\left\{\frac{\sigma}{1-(\rho-\sigma)}F+\frac{1-\rho}{1-(\rho-\sigma)}G\right\},$$

$$\sigma F+(1-\sigma)G=(\rho-\sigma)G+\{1-(\rho-\sigma)\}\left\{\frac{\sigma}{1-(\rho-\sigma)}F+\frac{1-\rho}{1-(\rho-\sigma)}G\right\}.$$

因此由条件(ii)推知(3.6)成立。而当 $\sigma=0$ 且 $\rho=1$ 时，(3.6)显然成立。　　証毕

定理3.3　若 $F_1\prec F_2$ 且 $F_1\prec G\prec F_2$，則存在唯一的实数 ρ，$0<\rho<1$，使

$$\rho F_1+(1-\rho)F_2\sim G. \tag{3.7}$$

証明　由定理3.2和实数的性质，存在唯一的实数 ρ_0，滿足下面条件：

$$\lambda F_1+(1-\lambda)F_2\prec G,\ \text{当}\ 1\geqslant\lambda>\rho_0\ \text{时}, \tag{3.8}$$

$$\mu F_1+(1-\mu)F_2\succ G,\ \text{当}\ 0\leqslant\mu<\rho_0\ \text{时}. \tag{3.9}$$

所以若存在使(3.7)成立的实数 ρ，那么这个数非是 ρ_0 不可。現在証明

$$H\equiv\rho_0F_1+(1-\rho_0)F_2\sim G. \tag{3.10}$$

若(3.10)不成立，則 $H\prec G$ 或 $H\succ G$. 現設 $H\prec G$，那末取 $0<\mu<\rho_0$ 的任意实数 μ，由(3.9)，

$$K\equiv\mu F_1+(1-\mu)F_2\succ G. \tag{3.11}$$

所以 $H\prec G\prec K$，由条件(iii)，存在实数 λ，$0<\lambda<1$，使

$$\lambda H+(1-\lambda)K\prec G,$$

即

$$[\lambda\rho_0+\mu(1-\lambda)]F_1+\{1-[\lambda\rho_0+\mu(1-\lambda)]\}F_2\prec G. \tag{3.12}$$

但 $0<\lambda\rho_0+\mu(1-\lambda)<\rho_0$，因而(3.12)的成立和 ρ_0 的性质(3.9)相矛盾，故不可能是 $H\prec G$. 同样也可証明不可能是 $H\succ G$. 从而(3.10)成立。　　証毕

§4 效用函数

本节探討在第3节中所述的賭的优序关系如何用数的大小表示的問題。

定义4.1　所謂某主体的**效用**(utility)(或**效用函数**) U，是定

又在成果集合 $\Omega=\{\omega\}$ 上的有界实函数，对于任意的两个賭 $F_1=\sum p_{1i}\omega_{1i}$ 和 $F_2=\sum p_{2j}\omega_{2j}$，关系 $F_1\preceq F_2$ 与

$$\sum_i p_{1i}U(\omega_{1i})\leqslant\sum_j p_{2j}U(\omega_{2j}) \tag{4.1}$$

等价。

对于任意的賭 $F=\sum p_i\omega_i$，数值 $\sum p_iU(\omega_i)$ 称为 F 的**期望效用**(expected utility)，或者簡称为賭 F 的效用，用 $U(F)$ 表示。所以(4.1)的条件可写为 $U(F_1)\leqslant U(F_2)$。

問題在于这样性质的效用函数 U 是否存在，如果存在的話又有多少个，以及它們之間成立怎样的关系。为了証明存在定理的方便，按照下面的順序进行思考。首先，明显地成立着下面的定理：

定理 4.1 設 Ω 上的效用函数 U 存在，并設 α,β 为任意实数。对于 $\alpha>0$，函数

$$U'=\alpha U+\beta \tag{4.2}$$

也是效用函数。(这个效用函数 U' 称为效用函数 U 用正一次变換所得的效用函数。)

由定理 4.1 可直接推出下面的系：

系 4.1 当效用函数存在，若 F,G 是两个賭，且 $F\prec G$，则对于任意两个实数 $a,b\,(a<b)$，存在效用函数 U，使得

$$U(F)=a,\quad U(G)=b.$$

定理 4.1 是說效用的任意增綫性函数仍是效用。下面定理 4.2 是說它的逆定理也成立，即任意的两个效用函数，互为增綫性函数，亦即一个是另一个的正一次变換。

定理 4.2 設 U 和 U' 是 Ω 上的两个效用函数，則存在两个实数 α,β，且 $\alpha>0$，使

$$U'=\alpha U+\beta. \tag{4.3}$$

証明 首先証明对于任意的三个成果 $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\in\Omega$，下面的恒等式(4.4)成立：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ U(\omega_1) & U(\omega_2) & U(\omega_3) \\ U'(\omega_1) & U'(\omega_2) & U'(\omega_3) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

若成果 ω_1, ω_2, ω_3 中有任意两个相等，则(4.4)左边的行列式有二列相等，从而(4.4)成立。如果不是这样，不失一般性，假定 $\omega_1 \prec \omega_2 \prec \omega_3$，则由定理 3.3 可知，存在着实数 ρ, $0<\rho<1$, 使

$$\rho\omega_1+(1-\rho)\omega_3 \sim \omega_2.$$

由此，根据效用函数的定义，

$$\begin{aligned} 1 &= \rho\cdot 1+(1-\rho)\cdot 1, \\ U(\omega_2) &= \rho U(\omega_1)+(1-\rho)U(\omega_3), \\ U'(\omega_2) &= \rho U'(\omega_1)+(1-\rho)U'(\omega_3). \end{aligned} \tag{4.5}$$

从而(4.4)左边行列式的第 2 列是第 1 列与第 3 列的綫性組合，所以(4.4)成立。

現在将 ω_1, ω_2 看作是任意的固定的 $\omega_1 \prec \omega_2$ 的成果，对任意的成果 $\omega_3 \in \Omega$，展开等式(4.4)，可得下面的等式：

$$[U(\omega_1)U'(\omega_2)-U'(\omega_1)U(\omega_2)]-U(\omega_3)[U'(\omega_2) \\ -U'(\omega_1)]+U'(\omega_3)[U(\omega_2)-U(\omega_1)]=0,$$

因此关系式

$$U'(\omega_3)=\frac{U'(\omega_2)-U'(\omega_1)}{U(\omega_2)-U(\omega_1)}U(\omega_3) \\ -\frac{U(\omega_1)U'(\omega_2)-U'(\omega_1)U(\omega_2)}{U(\omega_2)-U(\omega_1)} \tag{4.6}$$

对任意的 $\omega_3 \in \Omega$ 都成立，同时(4.6)右边 $U(\omega_3)$ 的系数的分子分母都是正的，所以定理得証。　　証毕

由定理 4.2 可直接得出下面的系。

系 4.2　若 Ω 上的二个效用函数 U 及 U'，对 $\omega_1, \omega_2, \omega_1 \prec \omega_2$，有

$$U(\omega_1)=U'(\omega_1) \text{ 且 } U(\omega_2)=U'(\omega_2),$$

则 U 和 U' 一致,即对任意的 $\omega\in\Omega$, $U(\omega)=U'(\omega)$。

下面給出几个定义:

在賭的集合 Ψ^* 上,对于任意的 F, $G\in\Psi^*$ 和任意的实数 ρ, $0\leqslant\rho\leqslant1$, 如果有 $\rho F+(1-\rho)G\in\Psi^*$, 则称集合 Ψ^* 为凸集。

对两个固定賭 G, H, $G\preceq H$, 滿足 $G\preceq F\preceq H$ 的 F 全体的集合,称为有端点 G, H 的賭的区間。

賭的凸集 Ψ^* 上的**超效用函数** (hyper-utility function) V 是定义在 Ψ^* 上的有界实函数,并滿足下列条件:

(i) F, $G\in\Psi^*$ 时, $F\preceq G$ 和 $V(F)\leqslant V(G)$ 等价。

(ii) F, $G\in\Psi^*$, $0\leqslant\rho\leqslant1$ 时,

$$V[\rho F+(1-\rho)G]=\rho V(F)+(1-\rho)V(G). \tag{4.7}$$

根据这些定义,下列各命題是显然的。

(1) 所有賭的集合 Ψ 都是凸的。

(2) 賭的两个凸集的交是凸的。

(3) 賭的区間是凸的。另外存在着含有有限个任意的賭的区間。

与推导系 4.1, 4.2 一样,下面命題成立:

(4) 若賭的凸集 Ψ^* 上的超效用函数存在, 当 F, $G\in\Psi^*$, $F\prec G$ 时,只存在唯一的一个超效用函数 V, 使得 $V(F)=0$, $V(G)=1$.

輔助定理 4.1 在由任意两个賭 F_1, F_2, $F_1\prec F_2$ 所确定的区間 I 上,存在着超效用函数 V.

証明 对任意的 $F\in I$, 由定理 3.3, 只存在一个实数 (用 $V(F)$ 表示),使

$$F\sim(1-V(F))F_1+V(F)F_2. \tag{4.8}$$

現在証明 I 上这样定义的函数 V 是区間 I 上的超效用函数。

当 G, $H\in I$, $G\preceq H$ 时, 由定理 3.2, 3.3 和函数 V 的定义,

很明显 $V(G)\leqslant V(H)$。再有

$$G\sim(1-V(G))F_1+V(G)F_2,\ H\sim(1-V(H))F_1+V(H)F_2,$$

所以对任意的 $0\leqslant\rho\leqslant 1$，由定理 3.1，下面等式成立：

$$\begin{aligned}\rho G+(1-\rho)H\sim&\rho[(1-V(G))F_1+V(G)F_2]\\&+(1-\rho)[(1-V(H))F_1+V(H)F_2]\\=&[1-\{\rho V(G)+(1-\rho)V(H)\}]F_1\\&+\{\rho V(G)+(1-\rho)V(H)\}F_2.\end{aligned}$$

因而，由函数 V 的定义，

$$V(\rho G+(1-\rho)H)=\rho V(G)+(1-\rho)V(H).$$

从而 V 是区間 I 上的超效用函数。　　　　証毕

定理 4.3　成果 ω 的集合 Ω 上，存在着效用函数。

証明　将任意的两个成果 ω_1，ω_2，$\omega_1\prec\omega_2$，固定为1組。这时由輔助定理 4.1 及超效用函数的性质 (4)，在含有 ω_1 及 ω_2 的任意的賭的区間 I 上，只存在一个使 ω_1 及 ω_2 对应的数値分别为 0 和 1 的超效用函数。对于这样的賭所定义的任意两个区間 I_1 和 I_2，設使 ω_1 和 ω_2 对应的数値同时为 0 和 1 的两个超效用函数为 V_1 和 V_2。由于 $I_1\cap I_2$ 是含有 ω_1，ω_2 的凸集，从而 V_1 和 V_2 是 $I_1\cap I_2$ 上的两个超效用函数，而且 $V_1(\omega_1)=V_2(\omega_1)=0$，$V_1(\omega_2)=V_2(\omega_2)=1$。因而由超效用函数的性质 (4)，在 $I_1\cap I_2$ 上两个超效用函数 V_1 和 V_2 是一致的。現在以 F 为任意的賭，这时含有 ω_1，ω_2 及 F 的賭的区間至少存在一个，在这些区間上使 ω_1，ω_2 对应的数値分别为 0，1 的超效用函数，如上面所証明，使 F 对应于同一的数値，这数値用 $V(F)$ 表示。这样得出了定义在所有賭的集合 Ψ 上的函数 V。現在証明这个函数 V 就是 Ψ 上的超效用函数。

为此，設 F_1，F_2 为任意的两个賭，ρ 为 $0<\rho\leqslant 1$ 的任意实数。此时，存在着含有 ω_1，ω_2，F_1，F_2 及 $\rho F_1+(1-\rho)F_2$ 的賭的区間。

由函数 V 的定义，显然 V 是这个区間上的超效用函数。因而，$V[\rho F_1+(1-\rho)F_2]=\rho V(F_1)+(1-\rho)V(F_2)$ 是成立的，另外 $F_1\preceq F_2$ 和 $V(F_1)\leq V(F_2)$ 是等价的，所以函数 V 是 Ψ 上的超效用函数。即 Ψ 上超效用函数 V 的存在得到証明。然后用这个函数 V，定义 Ω 上的函数 U 如下：

$$U(\omega)=V(\omega)\quad (对所有的\ \omega\in\Omega), \tag{4.9}$$

那末由超效用函数的定义条件(i)，(ii)可知，用(4.9)定义的函数 U 确是 U 上的效用函数。这样，效用函数的存在得到証明。

§5 博奕的展开型及正規型

我們接續第2节再回来討論博奕的問題。对于博奕的各局成果 ω 全体的集合 Ω 上的賭，假定各局中人 i 有滿足第3节所述条件(i)至(iii)的优序关系，从而根据第4节所述，下面事項成立：

(i*) 对于各局中人 $i(i=1, 2, \cdots, n)$，*存在定义在成果集合 Ω 上的效用函数 U_i*。

另外我們对局中人假定下面事項：

(ii*) 各局中人，在博奕的規則外，完全知道所有局中人的效用函数。

这个假定在将博奕理論应用到現实的竞爭上时，約束过苛。因为每个人对他人的效用函数是不能完全知道的。

最后，作为局中人的行动原則，假定如下：

(iii*) 各局中人是为了获得最大的效用而行动的。

各局中人的行动符合这个假定的說法，实际上可以考虑为希望在現实的行动上能实現由于效用的导入而确定的优序关系。这个假定常称为局中人行动合理性的假定。

由第2节所述的博奕規則(i)～(v)及本节的假定(i*)～(iii*)所成的体系称为**博奕的展开型**(extensive form)。这个展开型是

表現博奕的本来面貌的最基本的体系。但是通过展开型規定各局中人的最好局的方法，一般是非常困难的。因为即使是簡单的室內游戏，也有极复杂的展开型，可以想象在处理上是不容易的。博奕的理論比較重要的作用之一，就是不管具有如何复杂的展开型的博奕，通过策略(strategy)概念的引入，可以将其化为形式极为单純的所謂正規型 (normal form)。下面就来考虑将展开型化为正規型的問題。

当要进行某个博奕时，各局中人对于自己可能出現的所有步法，以及应該选取哪一个选擇事項为着，若預先告訴自己的代理人或者公正人后（当然不能被其他局中人知道），即使局中人不在，他的代理人或者公正人，可以按照所給的指示，根据各局中人的意图将各局进行完了。这样，对于上述，把所有可能的步法和着都給指出的对策計划称为策略。

現在形式地来描述一下策略的定义。

在博奕的树上，考虑人的步法上的一个支点 v. 在这个支点 v，可能的分支（选擇事項）有 r 个，这些选擇事項用数字 $1, 2, \cdots, r$ 表示，其集合为 $S(v)$. 当某个信息集合 z 中有两个以上的支点 $v_i (i=1, 2, \cdots, k)$ 时，根据信息集合的条件(2)，各支点 v_i 对应的集合 $S(v_i)$，$(i=1, \cdots, k)$ 认为是同一个（第1节）。从而将这些集合看作是对应于信息集合 z 的选擇事項集合，用 $S(z)$ 表示。現在对局中人 i 給出 q 个不同的信息集合，用 $z_{i1}, \cdots, z_{iq}$ 表示。我們引入下面定义：

定义 5.1 博奕局中人 i 的**純策略** (pure strategy) ❶ 是定义在局中人 i 的信息集合的集合$\{z_{ij}\}$，$j=1, \cdots, q$ 上的函数 f_i，且

$$f_i(z_{ij}) \in S(z_{ij}) \quad (j=1, \cdots, q).$$

若 $f_i(z_{ij}) = b_{ij} \in S(z_{ij})$（在此 b_{ij} 是含于 $S(z_{ij})$ 的一个选擇事項的編号），策略 f_i 表示为具有 q 个編号的組 $f_i = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{iq})$.

❶ 引入純策略是为了区别于以后的**混合**策略。由于我們現在只考虑純策略，为了簡单起見，将它簡称为策略。

例 5.1 考虑图 5.1 的博奕树。第一步法是局中人 1 的步法，局中人 1 在此选擇数 1 或者 2 ($S(z_{11})=\{1, 2\}$)。第二步法是机遇步法，在此擲一錢币($S(v_2)=S(v_3)=\{$正, 反$\}$)，即錢币的正或反出現的概率各为 1/2。第 3 步法是局中人 2 的步法，若第二步法出現正，公正人应該将以前的局的过程完全告訴局中人 2。这样，信息集合 z_{21} 及 z_{22}，都只有一个支点 v_4 或 v_5。在每个步法上局中人 2 允許在数 2, 3, 4 間进行选擇。若在第二步法出現反，公正人只告訴局中人 2 出現了反，而不告訴他出現反的經过过程。从而这时局中人 2 的信息集合 z_{23} 是由两个支点 v_6 及 v_7 构成的。局中人 2 可在数 5 或 6 中进行选擇，所以 $S(z_{23})=\{5, 6\}$。第四步法又是机遇步法，数 1, 2 出現的概率分別为 0.4, 0.6，到此局告終止。作为終局的成果規定如下：計算第一，第三及第四步法所取数的和 m，若 m 为奇数，则局中人 2 支付給局中人 1 以 m 圓，若 m 为偶数，则局中人 1 支付給局中人 2 以 m 圓。現在研究一下这个博奕中各局中人的策略。

局中人 1 的策略 局中人 1 的信息集合仅有一个 z_{11}，从而局中人 1 所能取的策略，只有函数 f_{11}，$f_{11}(z_{11})=1$ 及函数 f_{12}，$f_{12}(z_{11})=2$ 两个。或者也可将其表示为 $f_{11}=(1)$，$f_{12}=(2)$。

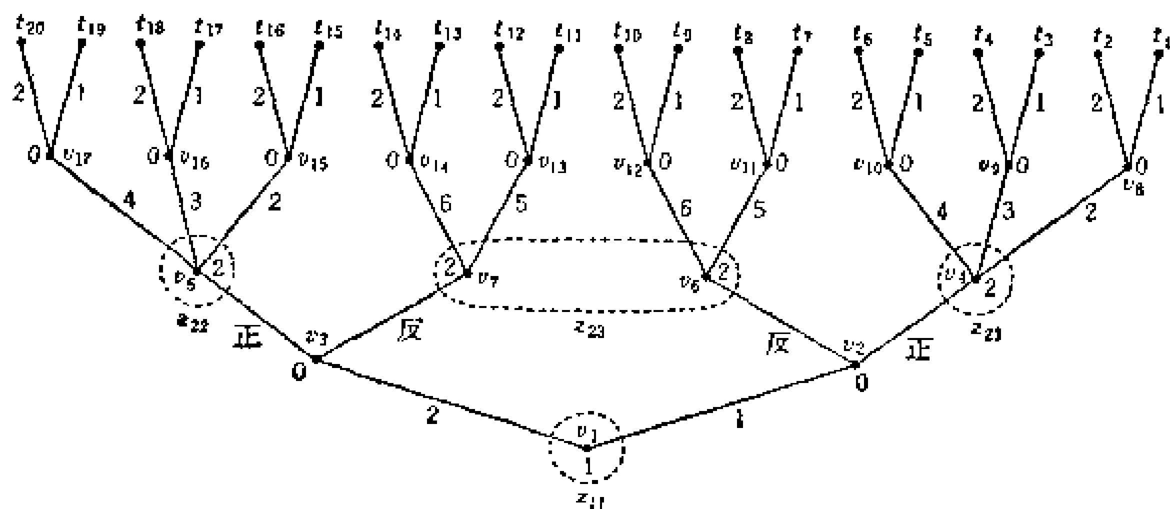


图 5.1

局中人2的策略　局中人2的信息集合是z_{21}，z_{22}及z_{23}三个，从而在其上定义的函数，例如下面的函数f_{21}是局中人2的一个策略，$f_{21}(z_{21})=2\in S(z_{21})$，$f_{21}(z_{22})=4\in S(z_{22})$，$f_{21}(z_{23})=5\in S(z_{23})$．这个策略$f_{21}$也可用$f_{21}=(2,4,5)$表示。因此局中人2的策略全部是$3\times3\times2=18$个。

于是在一局博奕中，設局中人1，2分别采取策略$f_{11}=(1)$，$f_{21}=(2,4,5)$．这时即使局中人不在現場，由公正人代理也能一样地进行。首先在第一步法局中人1取数1，第二步法投擲錢币出現正，第三步法局中人取数2，机遇步法的第四步法出現数1(概率为0.4)，到此一局終止。这个局中第一、三、四步法所取的数字之和$1+2+1=4$是偶数，所以此局的成果是局中人1支付給局中人2四圆。

若博奕不含有机遇步法，当各局中人分别选定一个策略时，它所对应的局的成果，显然是唯一确定的。但是如例5.1，若有机遇步法时，各局中人虽然分别选定了策略，可是博奕的局完全依賴于机遇步法出現的結果，从而博奕的局的成果就不能唯一确定。例如上例的局，实現的概率是$0.5\times0.4=0.2$，換句話說，就是在这場博奕中，局中人1，2分別采取策略$f_{11}=(1)$及$f_{21}=(2,4,5)$时，这局到达終点t_1的概率是0.2。同样可确定到达任意頂点t_i的局的概率。例如到达頂点t_2，t_3的概率分别是$0.5\times0.6=0.3$，$0.5\times0=0$等等。

这样，对一般的博奕，局中人$1,2,\cdots,n$分别取一个策略f_1，$f_2,\cdots,f_n$时，可以确定对应于策略組$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，到达博奕的树的任意頂点t的局的概率，用$p(f;t)$表示。換句話說，可确定对应于各局中人取的策略組$f=(f_1,\cdots,f_n)$在博奕的树的頂点集合$T=\{t\}$上的概率分布p_f．可是博奕的局在頂点t終止时，得出局的成果$\omega(t)\in\Omega$．从而T上的概率分布p_f，誘导出局的成

果集合 $\Omega=\{\omega\}$ 上的概率分布 π_f. 也就是說，各局中人取的策略組 $f=(f_1, \cdots, f_n)$ 对应于 Ω 上的概率分布 π_f. 由博奕的条件 (i) 可确定 π_f 对于局中人 i 的期望效用 $U_i(\pi_f)$. 以后期望效用 $U_i(\pi_f)$ 可写为 $M_i(f)$ 或 $M_i(f_1, \cdots, f_n)$，即

$$M_i(f_1, \cdots, f_n)=\sum_{\omega} U_i(\omega)\pi_f(\omega) \quad (i=1, 2, \cdots, n). \tag{5.1}$$

如此，当局中人 $1, 2, \cdots, n$ 分别取策略 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 时，根据博奕的規則，可确定对于局中人 i (成果上的概率分布的) 的效用 $M_i(f_1, \cdots, f_n)$，$i=1, 2, \cdots, n$. 此效用 $M_i(f)$ 称为局中人 $1, 2, \cdots, n$ 取策略 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 时的局中人 i 的**赢得**(payoff)。作为策略 f_i, $i=1, \cdots, n$ 的函数 M_i 称为**赢得函数**(payoff function)。

从以上的考察，具有任何展开型的博奕，由于策略概念的引入，可以表示成下面整理后的形式：

(1) 給出局中人 i 可取得的策略 f_i 的集合 $F_i(i=1, 2, \cdots, n)$.

(2) 給出博奕的局的成果 ω 的集合 Ω.

(3) 确定对应于各局中人所取的策略的任意組 $f=(f_1, \cdots, f_n)$, $f_i\in F_i$, 在 Ω 上的概率分布 π_f.

(4) 博奕的局可按下面所述进行：即各局中人可在不知道其他局中人所取的策略的情况下，同时选取一个策略 $f_i\in F_i$ $(i=1, \cdots, n)$.

(5) 局中人 i 可获得 (5.1) 定义的赢得 $M_i(f)$，这时局告終止。

上面的表示形式称为博奕的**正規型** (normal form)。可表示成 $G=(F_1, \cdots, F_n; M_1, \cdots, M_n)$. 今后主要是研究正規型的博奕。

第2章　2人零和博奕 I (純策略范圍)

§6　2人零和博奕

在局中人的数目 n 超过2的一般 n 人博奕中，有局中人相互間完全不許可合作的情况(非合作博奕)和局中人为了获得共同利益許可相互合作的情况(合作博奕)。对于前者，可以用2人博奕中的平衡概念，使其一般化。后者可以将 n 个局中人分为两群，由于每群局中人的相互結合，問題就归結为2人博奕的对抗状态。因此，为了研究一般的 n 人博奕，必須首先研究2人博奕。同时在实际問題中，两个主体間相互对抗的情况也非常多，所以2人博奕就其本身来說，也有重要的研究价值。本章是以2人博奕为研究对象。

玆討論2人博奕的正規型。局中人1有 m 个策略，記为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，局中人2有 n 个策略，記为 $\beta_1, \cdots, \beta_n$，它們的集合分別用 $F_1 \equiv A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$，$F_2 \equiv B = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 表示。局中人1，2分別取策略 α_i，β_j 时，局的成果 ω 的集合 Ω 上的概率分布記为 π_{ij}。这种各局中人策略的数目是有限的2人博奕，可用表6.1的矩陣表示。

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & & \beta_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1n} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_{m1} & \pi_{m2} & \vdots & \pi_{mn} \end{array}\right] \end{array}$$

表　6.1

对各概率分布 π_{ij}，局中人1，2分别有它的优序。如果两局中人的优序一样，問題就沒有研究的必要。因为这时 π_{ij} 中对局中人1与局中人2来說最有利的(或者最优的)是同一个东西，記为 $\pi_{i_0j_0}$。从而这时局中人1，2分别取策略 α_{i_0}，β_{j_0} 是最优的，这时他們之間沒有对抗。另外一种情况是两个局中人的优序完全相反，也就是若局中人 μ 选取 π_{ij} 比选取 π_{hk}

好时，局中人 ν 选取 π_{hk} 比选取 π_{ij} 好，若对于局中人 μ 来說 π_{ij} 和 π_{hk} 沒有差别，则对于局中人 ν 来說也是一样，这里 $\mu,\nu=1,2$. 这种情况的博奕称为**严格的对抗** (strictly competitive)。在本章就是研究严格对抗的 2 人博奕。

在严格对抗的 2 人博奕中，若 $M_1(\alpha_i, \beta_j)>M_1(\alpha_h, \beta_k)$，则 $M_2(\alpha_i, \beta_j)<M_2(\alpha_h,\beta_k)$，反之也成立。从而在这样的博奕中，局中人 1 希望的局势是得到大的 $M_1(\alpha_i, \beta_j)$，也就是小的 $M_2(\alpha_i, \beta_j)$，局中人 2 希望的是大的 $M_2(\alpha_i, \beta_j)$，也就是小的 $M_1(\alpha_i, \beta_j)$. 局中人根据上述的愿望来考虑决定他的策略。从而，在研究局中人 1, 2 取什么样的策略为最优的問題时，首先假定

$$M_2(\alpha_i,\beta_j)=-M_1(\alpha_i,\beta_j) \quad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n), \tag{6.1}$$

而且局中人 1 努力使 $M_1(\alpha_i, \beta_j)$ 大，局中人 2 努力使 $M_1(\alpha_i, \beta_j)$ 小来进行討論。由于(6.1)成立，也就是

$$M_1(\alpha_i, \beta_j)+M_2(\alpha_i, \beta_j)=0 \quad (i=1, \cdots,m;\ j=1, \cdots, n) \tag{6.2}$$

成立，因此，称这种博奕为**2人零和博奕** (zero-sum two-person game)。很明显，2 人零和博奕是严格对抗的 2 人博奕。以后我們将严格的对抗博奕和零和博奕看作同义辞使用。在本章仅考察 2 人零和博奕。

在 2 人零和博奕中，局中人 2 的贏得函数 M_2，由(6.1)，可用局中人 1 的贏得函数 M_1 (可写为 M) 完全确定。因此，2 人零和博奕的正規型，可由指定的 A, B 及 M 完全規定下来。这样，博奕可以表示成 $G=(A, B, M)$. 或者設

$$M_1(\alpha_i, \beta_j)=a_{ij},\ M_2(\alpha_i, \beta_j)=b_{ij} \quad (i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n), \tag{6.3}$$

在 2 人零和博奕中，

$$a_{ij}+b_{ij}=0 \quad (i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n), \tag{6.4}$$

博奕也可以用以局中人 1 的贏得 a_{ij} 为元素的矩陣

$$(a_{ij}) \quad (i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n) \tag{6.5}$$

完全規定下来。这个矩陣(a_{ij})称为2人零和博奕的**贏得矩陣**。在这个意义下，各局中人的策略数是有限的2人零和博奕（称为有限2人零和博奕），也称为**矩陣博奕**(rectangular game)。

§7 矩陣博奕的解

由博奕的条件(iii)，在矩陣博奕(a_{ij})中，指导局中人1的行动方針是尽量得到大的a_{ij}，而指导局中人2的行动方針是尽量得到小的a_{ij}。但是局中人的行动（策略的选定）所产生的成果必依賴于其他局中人的行动，而且各局中人是在不知道其他局中人的策略的情况下选定自己的策略的。在这种博奕中，各局中人的最优策略就是本节所要研究的課題。

	β_1	β_2	β_3
α_1	10	0	−8
α_2	−2	1	2
α_3	3	2	4
α_4	5	−3	6

表 7.1

現在考察由表7.1的贏得矩陣所給定的矩陣博奕。

例 7.1 (i) 局中人1的观点：若局中人1知道局中人2的策略时，他的最优策略由贏得矩陣，可以按表7.2直接得出。

若局中人2的着是：	β_1	β_2	β_3
对此，局中人1的最优策略为：	α_1	α_3	α_4
局中人1的贏得为：	10	2	6

表 7.2

上面局中人1的最好的着是依局中人2的着而确定的。但在实际中，局中人1并不知道局中人2的策略。若局中人1对局中人2进行分析，根据某种理由能够推出局中人2的某个特定策略，这时局中人1可以根据分析的結果采取最优策略。和表7.2一样可以作出表7.3。

若局中人1的着是:	α_1	α_2	α_3	α_4
对此,局中人2的最优策略为:	β_3	β_1	β_2	β_2
此时局中人1的赢得为:	-3	-2	2	-3

表 7.3

对于这样的分析,可以看出,局中人2的最优策略,反过来也依赖于局中人1的着,当然局中人2是不能知道这些依赖关系的。从而局中人1(至少是这个分析方法)不能猜出局中人2所要取的策略。反之,从局中人2的观点来进行討論,結果也同样,即局中人2不能猜出局中人1所要取的策略。现在改变考察的方法,引出下面的量。

定义 7.1 在矩陣博奕(a_{ij})上,称

$$\min_j a_{ij}$$

为局中人1取策略$\alpha_i(i=1,\cdots,m)$时的**安全水准**(security level),称

$$\min_i [-a_{ij}] = -\max_i a_{ij}$$

为局中人2取策略$\beta_j(j=1, \cdots, n)$时的**安全水准**。

据此,表7.3表示局中人1取策略α_1, α_2, α_3或α_4时的安全水准分别为-3, -2, 2或-3. 从而由表7.3,可知策略α_3使局中人1的安全水准最大,这时的安全水准是2. 也就是局中人1取策略α_3,至少能保証赢得2,其他策略不能保証2以上的赢得。

(ii) 局中人2的观点:表7.2表示局中人2取策略β_1,β_2或β_3时的安全水准分别是-10,-2或-6. 其中策略β_2使局中人2的安全水准最大。即局中人2取策略β_2,能使局中人1的赢得降到2以下,而其他的策略将不可能使局中人1的赢得降到2以下。

由以上的考察,得出下面的結論:

(a) α_3使局中人1的安全水准最大。

(b) β_2 使局中人 2 的安全水准最大。

(c) 若局中人 2 取 β_2，对局中人 1 来説 α_3 是最优策略。

(d) 若局中人 1 取 α_3，对局中人 2 来説，β_2 是最优策略。

在此，我們可以认为，这个博奕中局中人 1 取策略 α_3，同时局中人 2 取策略 β_2 是两个局中人的最优着。

再看一下局中人 1, 2 的策略組 (α_3, β_2) 的性质 (c), (d)，它具有下面的意义：卽当局中人 2 保持 β_2 时，局中人 1 沒有改变策略 α_3 的理由，同时，当局中人 1 保持 α_3 时，局中人 2 也沒有改变策略 β_2 的任何理由。从这个意义来説，策略組 (α_3, β_2) 是稳定的。这种策略組称为博奕的平衡点。

定义 7.2 在博奕 $G=(A, B, M)$ 中，局中人 1, 2 的策略組 $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$，满足下列条件 (i) 和 (ii) 时，称为博奕 G 的**平衡点**：

(i) $M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = \max\limits_{\alpha_i} M(\alpha_i, \beta_{j_0})$,

(ii) $M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = \min\limits_{\beta_j} M(\alpha_{i_0}, \beta_j)$.

易見条件 (i), (ii) 和下面的条件 (iii) 等价：

(iii) $M(\alpha_i, \beta_{j_0}) \leqslant M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) \leqslant M(\alpha_{i_0}, \beta_j)$,

$$(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n).$$

博奕 $G=(A, B, M)$ 的平衡点 $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$，在博奕的赢得矩陣 (a_{ij}) 中对应的元素 $a_{i_0 j_0}$ 是第 i_0 行的最小值，同时是第 j_0 列的最大值，卽 $a_{i_0 j_0}$ 是赢得矩陣 (a_{ij}) 的**鞍点** (saddle point)。

由以上的説明可知，用平衡点来定义博奕的解是妥当的。

定义 7.3 若博奕 $G=(A, B, M)$ 的平衡点为 $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$，则

(a) 局中人 1, 2 的策略組 $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ 称为博奕的**解** (solution)。

(b) α_{i_0} 称为局中人 1 的**最优策略** (optimal strategy)，β_{j_0} 称为局中人 2 的**最优策略**。

(c) 值 $M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ 称为博奕 G 的**值** (value)。

其次要研究是否对任意的矩陣博奕都存在平衡点（卽解），若存在几个平衡点，那末它們之間的关系又如何。

現在討論关于博奕 $G=(A, B, M)$ 的平衡点的性质。

（i）矩陣博奕的平衡点未必存在。

例 7.2 贏得矩陣表 7.4 給定的博奕，很明显沒有平衡点。因此，这个博奕不存在我們定义的解，也就是說不存在各局中人的最优策略。

$$\begin{array}{c} \quad \beta_1 \quad \beta_2 \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

表 7.4

关于不具有平衡点的矩陣博奕，是否在任何意义下都沒有称为解的策略組呢？現在对这个問題略加說明。在例 7.2 的博奕中，局中人 1 取 α_2 可以确保最大的安全水准 3. 局中人 2 取 β_1 可确保最大的安全水准 -5. 局中人 2 对于局中人 1 的策略 α_2 来說，取 β_1 是比取 β_2 好。因而局中人 1 有充分的理由可以认为局中人 2 取 β_1. 經过这样分析，局中人 1 就要考虑取 α_1 而不取 α_2 了。另一方面，局中人 2 从自己角度出发，推得局中人 1 应該有上述的想法，这时，針对局中人 1 的策略 α_1，他就要取 β_2 而不取 β_1. 假若局中人 1 也能猜出局中人 2 的这种想法的話，这时他就又要取 α_2 了。这样两人互相推测，只能是循环不已，两个局中人的稳定策略組是不存在的。这种情况在不存在平衡点的博奕中是常有的。从而我們可认为不存在平衡点的博奕（至少在目前阶段）不存在解，各局中人的最优策略也不存在。

（ii）存在具有两个以上平衡点的矩陣博奕。

$$\begin{array}{c} \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

表 7.5

例 7.3 在由表 7.5 給定的博奕中，策略組 (α_1, β_1) 和 (α_1, β_3) 都是平衡点。

（iii）矩陣博奕 $G=(A, B, M)$ 的策略組 $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ 和 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 都是平衡点时，下列关系成立：

(a) $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_0})$ 也都是平衡点。这个性质称为平衡点的**可換性**。

(b) 在所有的平衡点上，局中人 1 的贏得相等（这个定值卽博奕的值）：

$$M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = M(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1}) = M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_1}) = M(\alpha_{i_1}, \beta_{j_0}). \quad (7.1)$$

証明　$(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$是平衡点，所以

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j}, \quad \text{对所有的 } i, j. \tag{7.2}$$

在此，$M(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}$。同样，$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$是平衡点，所以

$$a_{ij_1} \leqslant a_{i_1j_1} \leqslant a_{i_1j}, \quad \text{对所有的 } i, j. \tag{7.3}$$

由(7.2)，(7.3)得

$$a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j_1} \leqslant a_{i_1j_1} \leqslant a_{i_1j_0} \leqslant a_{i_0j_0}.$$

所以(7.1)成立，即(b)得証。

再由(7.1)和不等式

$$a_{ij_1} \leqslant a_{i_1j_1} = a_{i_0j_1} = a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j}, \quad \text{对所有的 } i, j,$$

立刻能看出$(\alpha_{i_0}, \beta_{j_1})$是平衡点，所以(a)得証。　　　　証毕

(iv)　构成平衡点的各策略，使各自的局中人的安全水准为最大。

証明　$(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$为任意的平衡点，由定义，

$$\begin{aligned} \alpha_{i_0} \text{ 的安全水准} &= \min_j a_{i_0j} = a_{i_0j_0} = \max_i a_{ij_0} \\ &\geqslant a_{ij_0} \geqslant \min_j a_{ij} = \alpha_i \text{ 的安全水准。} \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} \beta_{j_0} \text{ 的安全水准} &= -\max_i a_{ij_0} = -a_{i_0j_0} = -\min_j a_{i_0j} \\ &\geqslant -a_{i_0j} \geqslant -\max_i a_{ij} = \beta_j \text{ 的安全水准。} \end{aligned} \tag{7.5}$$

所以得証。　　　　証毕

(v)　矩陣博奕$G=(A, B, M)$存在平衡点的充要条件是下面等式成立：

$$\max_i \min_j M(\alpha_i, \beta_j) = \min_j \max_i M(\alpha_i, \beta_j). \tag{7.6}$$

若另有$(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$也为任意的平衡点，則(7.6)的共同值等于$M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$.

証明　必要性：設$(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$为博奕$G$的任意平衡点，由(7.4)，(7.5)，知

$$a_{i_0j_0}=\max_i \min_j a_{ij}, \tag{7.7}$$

$$-a_{i_0j_0}=\max_j(-\max_i a_{ij})=-\min_j \max_i a_{ij} \tag{7.8}$$

成立。因而由(7.7)，(7.8)可知(7.6)成立，同时它的共同值等于 $M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})=a_{i_0j_0}$。

充分性：設 i_0 和 j_0 使

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j a_{i_0j}, \quad \min_j \max_i a_{ij}=\max_i a_{ij_0} \tag{7.9}$$

(这样的 i_0, j_0 确实存在)，所以若(7.6)成立，則

$$\min_j a_{i_0j}=\max_i a_{ij_0}. \tag{7.10}$$

另一方面，很明显

$$\min_j a_{i_0j}\leqslant a_{i_0j_0}\leqslant \max_i a_{ij_0}. \tag{7.11}$$

由(7.10)，所以(7.11)中等式成立，即$(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$是博奕的平衡点。

証毕

使(7.9)成立的策略 α_{i_0} 和 β_{j_0}，分别称为 **maximin 策略**和 **minimax 策略**。根据(v)的証明，直接可得出下面結果。

(vi) 若博奕 $G=(A, B, M)$ 存在平衡点，則由局中人1的 maximin 策略和局中人2的 minimax 策略組成的策略組是平衡点。

由上面我們可以看到，有的矩陣博奕有解，有的矩陣博奕沒有解。同时也証明了矩陣博奕有解(有平衡点)的充要条件。但是条件(7.6)是就博奕的正規型的贏得矩陣来說的。从博奕的展开型的特征来看，还不能知道解的存在与否，但可以知道，至少当博奕是完全信息博奕时，解总是存在的，下面就来証明这个事实。

§8 完全信息博奕

完全信息博奕就是博奕树的各信息集合都只有一个支点的博

奕。这也就意味着将任意支点的各分支連起来，就分别成为某个完全信息博奕。从这个事实能使用归納法来定义这种博奕。根据下面的定义，完全信息博奕的次数是指含在博奕中步法的最大数。

定义 8.1　在博奕 $G=(A,\ B,\ M)$ 中，若 $M(\alpha,\beta)$ 对所有的 $\alpha\in A$, $\beta\in B$ 都是常数，此博奕称为次数 0 的完全信息博奕，簡記为 P. I. G. 再有，在博奕 $G=(A,\ B,\ M)$ 中，存在有集合(有限) Z，对各个 $z\in Z$，对应着次数 n 的 P. I. G., $G_z=(A_z,\ B_z,\ M_z)$，記其全体为 $\mathfrak{G}$. 当 $\mathfrak{G}$ 满足下列条件时，称博奕 G 为次数 $n+1$ 的 P. I. G.:

情况 1: 博奕 G 的第一步法对应于局中人 1 的步法。A 是所有由 $z\in Z$, $a\in A_z$ 組成的組 $(z,\ a)$ 的全体，B 的各元素 β 是定义在 Z 上的函数，对所有的 $z\in Z$，有 $\beta(z)\in B_z$; 反之，对任意的 $b_z\in B_z$, $z\in Z$，存在着 B 的某个元素 β，对所有的 $z\in Z$,

$$\beta(z)=b_z,$$

且
$$M((z,\ a),\ \beta)=M_z(a,\ \beta(z)).\tag{8.1}$$

情况 2: 博奕 G 的第一步法对应于局中人 2 的步法。B 是所有由 $z\in Z$, $b\in B_z$ 組成的組 $(z,\ b)$ 的全体，A 的各元素 α 是定义在 Z 上的函数，对所有的 $z\in Z$，有 $\alpha(z)\in A_z$; 反之，对任意的 $a_z\in A_z$, $z\in Z$，存在着 A 的某个元素 α，对所有的 $z\in Z$,

$$\alpha(z)=a_z,$$

且
$$M(\alpha,\ (z,\ b))=M_z(\alpha(z),\ b).\tag{8.2}$$

情况 3: 博奕 G 的第一步法对应于概率分布 p 中的机遇步法。A 与 B 的各元素 α, β 都是定义在 Z 上的函数，对所有的 $z\in Z$，分别有 $\alpha(z)\in A_z$, $\beta(z)\in B_z$; 反之，对于 A_z 与 B_z 的任意元素 a_z, b_z, $z\in Z$，有 A 与 B 的各元素 α, β，使

$$\alpha(z)=a_z,\ \beta(z)=b_z,\quad \text{对所有的 } z\in Z,$$

且
$$M(\alpha,\ \beta)=\sum_z p(z)M_z(\alpha(z),\ \beta(z)),\tag{8.3}$$

此处 p 是 Z 上的某概率分布。

这样，当博奕 G 对某个 n 是次数 n 的 P. I. G. 时，称 G 为完全信息博奕。

定理 8.1 完全信息博奕 $G=(A, B, M)$，总存在平衡点（即解）。当博奕 G 为次数 $n+1$ 的完全信息博奕时，相应于定义 8.1 中博奕組 $\mathfrak{G}$ 的三个情况，博奕 G 的值 v_G 分别由下式給出：

情况 1: $$v_G=\max_z v_G(z), \tag{8.4}$$

情况 2: $$v_G=\min_z v_G(z), \tag{8.5}$$

情况 3: $$v_G=\sum_z p(z) v_G(z), \tag{8.6}$$

此处 $v_G(z)$ 是完全信息博奕 G_z 的值。

証明 $n=0$ 时定理显然成立。設問題中的博奕为 $(n+1)$ 次 P. I. G.，假定对次数比 $(n+1)$ 低的 P. I. G. 定理成立。因而存在 $v_G(z)$，$z\in Z$。

情况 1 的証明：現在設 $z^*\in Z$ 是使

$$v\equiv\max_z v_G(z)=v_G(z^*) \tag{8.7}$$

的元素。由假定，博奕 G_{z^*} 存在平衡点，設为 $(a^*_{z^*}, b^*_{z^*})$，则

$$v_G(z^*)=M_{z^*}(a^*_{z^*}, b^*_{z^*}). \tag{8.8}$$

現在取 A 的元素 $\alpha^*=(z^*, a^*_{z^*})$，再对任意的 $z\in Z$，設博奕的平衡点为 (a^*_z, b^*_z)，则对 B 的元素 β^*，有

$$\beta^*(z)=b^*_z, \quad 对所有的 z\in Z$$

（由上述假定可知是存在的）。但

$$v_G(z^*)=M(\alpha^*, \beta^*), \tag{8.9}$$

因而对任意的 $\beta\in B$，

$$M(\alpha^*, \beta)=M_{z^*}(a^*_{z^*}, \beta(z^*))\geqslant v_G(z^*)=M(\alpha^*, \beta^*). \tag{8.10}$$

此外，对任意的 $\alpha=(z, a)\in A$，

$$M(\alpha, \beta^*)=M_z(a, \beta^*(z))=M_z(a, b^*_z)$$

$$\leqslant v_G(z) \leqslant \max_z v_G(z) = v = v_G(z^*) = M(\alpha^*, \beta^*). \quad (8.11)$$

所以由(8.10), (8.11)知, 对任意的 $\alpha\in A$ 与 $\beta\in B$ 有

$$M(\alpha, \beta^*) \leqslant M(\alpha^*, \beta^*) \leqslant M(\alpha^*, \beta). \qquad (8.12)$$

也就是(α^*, β^*)是博奕 G 的平衡点。同时博奕 G 的值 $v_G = M(\alpha^*, \beta^*)$, 由(8.11)可知等于 v, 所以在情况1时定理成立。在情况2时同样可得到証明。

情况3的証明: 此时設

$$v = \sum_z p(z) v_G(z). \qquad (8.13)$$

再設对应于任意 $z\in Z$ 的博奕 G_z 的平衡点为 (a_z^*, b_z^*), $a_z^*\in A_z$, $b_z^*\in B_z$. 則将 z 固定时, 对任意的 $a_z\in A_z$ 和 $b_z\in B_z$, 下面不等式成立:

$$M_z(a_z, b_z^*) \leqslant M_z(a_z^*, b_z^*) = v_G(z) \leqslant M_z(a_z^*, b_z). \qquad (8.14)$$

并且, $\alpha^*\in A$ 和 $\beta^*\in B$ 使

$$\alpha^*(z) = a_z^*, \ \beta^*(z) = b_z^*, \quad \text{对所有的 } z\in Z$$

(由上述假定可知是存在的)。因而对任意的 $\alpha\in A$, 有

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta^*) &= \sum p(z) M_z(\alpha(z), \beta^*(z)) \\ &\leqslant \sum p(z) M_z(\alpha^*(z), \beta^*(z)) \\ &= \sum p(z) M_z(a_z^*, b_z^*) = \sum p(z) v_G(z) = v. \end{aligned} \qquad (8.15)$$

另一方面,

$$\sum p(z) M_z(\alpha^*(z), \beta^*(z)) = M(\alpha^*, \beta^*). \qquad (8.16)$$

所以由(8.15), (8.16),

$$M(\alpha, \beta^*) \leqslant M(\alpha^*, \beta^*) = v, \quad \text{对所有的 } \alpha\in A. \qquad (8.17)$$

同样可証明下面不等式是成立的:

$$M(\alpha^*, \beta^*) \leqslant M(\alpha^*, \beta) \quad \text{对所有 } \beta\in B. \qquad (8.18)$$

由(8.17), (8.18)可知(α^*, β^*)是博奕 G 的平衡点, 博奕的值 v_G 等于(8.13)定义的值 v.　　　　証毕

第3章　2人零和博奕II（混合策略的引入）

§9 混 合 策 略

对于有平衡点的博奕，我們討論了它的解，同时能够求出局中人的最优策略。但是对于沒有平衡点的博奕，如例 7.2 所述，到目前为止，还不可能作同样的处理。現在我們希望对这样的博奕，尽可能将策略的概念加以扩張，从而也能决定它的解。为此，我們再就沒有平衡点的博奕例 7.2，重新进行考察。对局中人 1 来說，若局中人 2 取 β_2，則他取 α_2 比取 α_1 好，若局中人 2 取 β_1，則他取 α_1 比取 α_2 好。可是局中人 1 并不知道局中人 2 所取的策略，因而他也沒法来判定 α_1 和 α_2 之間的优劣。現在局中人 1 投擲錢币，若出現正面，取 α_1，出現反面取 α_2。也就是分别以概率 1/2 来取 α_1 与 α_2。同时这个方法，不仅进行一次，而是多次反复地使用。从局中人 1 的角度来看，这样作似乎是避免对手摸清自己路子的有效办法，从而也可认为是他的策略，于是純策略的概念得到了扩張。这样的策略称为混合策略。

定义 9.1　当局中人 k 的純策略集合为 $A=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 时，以概率 x_i 取的純策略 α_i（用一定的机遇装置选定 α_i）也是一个策略，这种策略称为**混合策略**（mixed strategy）。在此

$$x_i \geqslant 0,\ i=1, \cdots, n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{9.1}$$

混合策略用 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 或 $x=\sum_i x_i\alpha_i$ 表示。

純策略 α_i 可以看作是以概率 1 取 α_i 的特殊混合策略。看作是混合策略的純策略 α_i，仍用 α_i 表示。当然也可表示为 $x=(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$。其中第 i 个分量为 1，其他分量皆为零。

这样，局中人 k 的混合策略 x 全体的集合和 n 維空間中以 $(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 1)$ 为頂点的 $(n-1)$ 維单純形 S_n 的点是一一对应的。因此，局中人 k 的混合策略全体的集合用 $S_n^{(k)}$, S_n 或 $S^{(k)}$ 表示。今后所說的策略，除非特别声明，都約定为混合策略。

这样，在例 7.2 的博奕中，局中人 1, 2 可以分别取任意的策略 $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$. 局中人 1, 2 分别取策略 x, y 时，局的結果对局中人 1 的效用期望値，用 $M(x, y)$ 表示。$M(x, y)$ 的値称为局中人 1, 2 取策略 x, y 时局中人 1 的**贏得**。在这个博奕中很明显，$M(x, y)$ 由下式給出：

$$M(x, y)=5x_1y_1+2x_1y_2+3x_2y_1+6x_2y_2.$$

局中人 2 的贏得是 $-M(x, y)$.

局中人 1 取策略 x 时的安全水准是

$$\min_y M(x, y)=\begin{cases}3+2x_1 & (0\leqslant x_1<1/2 \text{ 时})；\\ 4 & (x_1=1/2 \text{ 时})；\\ 6-4x_1 & (1/2<x_1\leqslant 1 \text{ 时}),\end{cases}$$

从而局中人 1 的安全水准最大値是 4，当局中人 1 取策略 $x^0=(1/2, 1/2)$ 时就可以得到保証。

局中人 2 取策略 y 时的安全水准是

$$\min_x[-M(x, y)]=-\max_x M(x, y)=\begin{cases}-(6-3y_1) & (0\leqslant y_1<2/3 \text{ 时})；\\ -4 & (y_1=2/3 \text{ 时})；\\ -(2+3y_1) & (2/3<y_1\leqslant 1 \text{ 时}),\end{cases}$$

从而局中人 2 的安全水准最大値是 -4，当局中人 2 取策略 $y^0=(2/3, 1/3)$ 时就可以得到保証。

另外局中人 1, 2 分别取策略 x^0, y^0 时，局中人 1 的贏得如下：

$$M(x^0, y^0)=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=4.$$

这样在例 7.2 的博奕中，可知存在具有下面性质的局中人 1 的策略 $x^0=(1/2, 1/2)$ 和局中人 2 的策略 $y^0=(2/3, 1/3)$ 以及値 4:

(a) 策略 $x^0=(1/2, 1/2)$ 对局中人 1 可确保安全水准 4，x^0 以外的策略只能保証比 4 小的安全水准。

(b) 策略 $y^0=(2/3, 1/3)$ 对局中人 2 可确保安全水准 -4，y^0 以外的策

略只能保証比 -4 小的安全水准。

(c) 若局中人 2 的策略 y^0 不变，则局中人 1 变更策略 x^0 时对自己不利。

(d) 若局中人 1 的策略 x^0 不变，则局中人 2 变更策略 y^0 时对自己不利。

上面的性质(a)～(d)，正是相当于博奕在純策略的范圍內平衡点所具有的性质(参照第七节)。因此，在用混合策略的例 7.2 博奕中，策略組 (x^0, y^0) 应认为是博奕的平衡点，或者认为是博奕的解，值 4 可认为是博奕的値。这样在純策略的范圍內沒有平衡点的博奕例 7.2，由于引用了混合策略的概念，也可认为存在有平衡点。那末在一般的矩陣博奕中，对两个局中人許可使用混合策略时，是否也总存在有平衡点呢？这个問題将由所謂 2 人零和博奕的基本定理或者 minimax 定理得到肯定的回答。本章的目的就是要証明这个定理。首先引入下面的定义。

定义 9.2 矩陣博奕 $G=(A, B, M)$，$A=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$，$B=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 中，对各局中人許可取混合策略的博奕，称为博奕 G 的**混合扩充** (mixed extension)，用 $\Gamma=(A, B, M)^*$ 表示。

博奕 Γ 中，局中人 1, 2 分别取策略 $x\in S_m$, $y\in S_n$ 时，局的結果对局中人 1 的期望效用 $M(x, y)$ 由下式給出：

$$M(x, y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i M(\alpha_i, \beta_j)y_j=\sum_{i,j}a_{ij}x_iy_j, \qquad (9.2)$$

在此 $a_{ij}=M(\alpha_i, \beta_j)$。$M(x, y)$ 称为局中人 1, 2 取策略 x, y 时，局中人 1 的**贏得**。

这里要注意的是，从(9.2)可以看出，函数 $M(x, y)$ 总是关于 x 或 y 的綫性函数。

再有下面关系式的意义是很显然的：

$$M(x, \beta_j)=\sum_i a_{ij}x_i, \quad M(\alpha_i, y)=\sum_j a_{ij}y_j. \qquad (9.3)$$

和博奕 $G=(A, B, M)$ 的平衡点一样，对于混合扩充博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$，平衡点可定义如下：

定义 9.3 在博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$ 中，局中人 1, 2 的策略組 (x^0, y^0) 滿足下面条件(i)与(ii)时，策略組 (x^0, y^0) 称为博奕 Γ 的**平衡点**：

(i) $M(x^0, y^0)=\max\limits_{x\in S_m} M(x, y^0)$.

(ii) $M(x^0, y^0)=\min\limits_{y\in S_n} M(x^0, y)$.

在此 S_r 是有界閉集合，所以定义的連續函数能在 S_r 上取最大值与最小值，从而 (i), (ii) 的 $\max\limits_x$, $\min\limits_y$ 都存在。

两个条件 (i), (ii) 和下面条件 (iii) 是等价的:

(iii) $M(x, y^0)\leqslant M(x^0, y^0)\leqslant M(x^0, y)$,

对所有的 $x\in S_m$, $y\in S_n$.

問題的焦点是博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$ 是否存在着平衡点。这个問題将在下节得到解决，下面是問題的准备知識。

輔助定理 9.1　下列不等式成立:

$$\max_x \min_y M(x, y)\leqslant \min_y \max_x M(x, y). \tag{9.4}$$

証明　很明显，对于任意的 $x\in S_m$, $y\in S_n$ 有

$$M(x, y)\leqslant \max_x M(x, y).$$

所以

$$\min_y M(x, y)\leqslant \min_y \max_x M(x, y). \tag{9.5}$$

(9.5)对于任意的 $x\in S_m$ 都成立，所以(9.4)成立。　　証毕

定理 9.1　对于博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$, 下面的条件 (1), (2) (3)相互等价。

条件(1): 博奕 Γ 存在平衡点 (x^*, y^*).

条件(2): 在博奕 Γ 中，下面的等式成立:

$$v_1\equiv\max_x \min_y M(x, y)=\min_y \max_x M(x, y)\equiv v_2. \tag{9.6}$$

条件(3): 存在有使下面关系式成立的实数 v 和局中人 1, 2 的策略 x^0, y^0:

$$M(\alpha_i, y^0)\leqslant v \quad (i=1, \cdots, m), \tag{9.7}$$

且

$$M(x^0, \beta_j)\geqslant v \quad (j=1, \cdots, n). \tag{9.8}$$

証明 (1)→(2)：从 v_1, v_2 的定义和由条件(1)假定存在的平衡点 (x^*, y^*) 的定义可知，下面不等式成立：

$$v_2 \equiv \min_y \max_x M(x, y) \leqslant \max_x M(x, y^*) = M(x^*, y^*)$$
$$= \min_y M(x^*, y) \leqslant \max_x \min_y M(x, y) \equiv v_1. \quad (9.9)$$

即

$$v_2 \leqslant v_1. \quad (9.10)$$

另一方面，由輔助定理 9.1，有

$$v_1 \leqslant v_2. \quad (9.11)$$

所以由 (9.10)，(9.11) 知 $v_1 = v_2$，即条件 (2) 成立。

(2)→(3)：設 $v = v_1 = v_2$，則取滿足

$$v_1 = \max_x \min_y M(x, y) = \min_y M(x^0, y), \quad (9.12)$$

$$v_2 = \min_y \max_x M(x, y) = \max_x M(x, y^0) \quad (9.13)$$

的策略 $x^0 \in S_m$, $y^0 \in S_n$（它是确实存在的）时，对所有的 $j = 1, \cdots, n$ 及所有的 $i = 1, \cdots, m$，下面关系式成立：

$$M(x^0, \beta_j) \geqslant \min_y M(x^0, y) = \max_x \min_y M(x, y) = v$$
$$= \min_y \max_x M(x, y) = \max_x M(x, y^0) \geqslant M(\alpha_i, y^0). \quad (9.14)$$

即条件(3)成立。

(3)→(1)：当局中人 1 的任意策略为 $x = (x_1, \cdots, x_m) \in S_m$ 时，对(9.7)的两边分别乘以 x_i，且对 i 由 1 到 m 相加，則得

$$M(x, y^0) \leqslant v. \quad (9.15)$$

同样由 (9.8)，对于局中人 2 的任意策略 $y = (y_1, \cdots, y_n) \in S_n$，有

$$M(x^0, y) \geqslant v, \quad (9.16)$$

所以由 (9.15)，(9.16)，对任意的 $x \in S_m$, $y \in S_n$，得

$$M(x, y^0) \leqslant v \leqslant M(x^0, y). \quad (9.17)$$

在(9.17)中，取 $x = x^0$, $y = y^0$，可知

$$v = M(x^0, y^0), \tag{9.18}$$

所以从 (9.17), (9.18) 可知 (x^0, y^0) 是平衡点。 証毕

定义 9.4 使(9.12)成立的策略 x^0 称为局中人 1 的 **maximin 策略**，使(9.13)成立的策略 y^0，称为局中人 2 的 **minimax 策略**。

由定理 9.1 的証明过程，直接可知下面的系成立。

系 9.1 若博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$ 有平衡点，則下列命题成立：

(a) 若 (x^*, y^*) 为任意的平衡点，則

$$v = M(x^*, y^*), \tag{9.19}$$

此处 v 是 (9.6) 两边的共同値。所以 x^*, y^* 分别是局中人 1 的 maximin 策略，局中人 2 的 minimax 策略。

(b) 若局中人 1 的任意的 maximin 策略为 x^0，局中人 2 的任意的 minimax 策略为 y^0，則 (x^0, y^0) 是博奕 Γ 的平衡点。

§10 矩陣博奕的基本定理

首先提出几个輔助定理。

輔助定理 10.1 对于局中人 1, 2 的任意策略 $x\in S_m$, $y\in S_n$，下面等式成立：

$$\min_y M(x, y) = \min_j M(x, \beta_j), \tag{10.1}$$

$$\max_x M(x, y) = \max_i M(\alpha_i, y). \tag{10.2}$$

証明 特别取 $y^{(j)}=(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ (第 j 个元素为 1, 其他元素为 0) 为局中人 2 的策略时，

$$\min_y M(x, y) \leqslant M(x, y^{(j)}) = M(x, \beta_j) \quad (j=1, \cdots, n),$$

所以

$$\min_y M(x, y) \leqslant \min_j M(x, \beta_j). \tag{10.3}$$

此外，对所有的 j，有

$$M(x, \beta_j) \geqslant \min_j M(x, \beta_j) \quad (j=1, 2, \cdots, n). \tag{10.4}$$

現在若局中人 2 取任意策略 $y=(y_1, \cdots, y_n)\in S_n$，对 (10.4) 的两边分别乘以 y_j，再对 j 由 1 到 n 相加，则得

$$M(x, y)\geqslant\min_j M(x, \beta_j),$$

所以

$$\min_y M(x, y)\geqslant\min_j M(x, \beta_j). \tag{10.5}$$

从而由 (10.3)，(10.5) 可知 (10.1) 成立。同样可証明 (10.2) 成立。 証毕

輔助定理 10.2 設 $\Gamma=(A, B, M)^*$ 是矩陣博奕 $G=(A, B, M)$ 的混合扩充博奕，只存在唯一的一个实数 $v=v^*$，和至少一个局中人 1 的混合策略 $x=x^*\in S_m$，以及局中人 2 的混合策略 $y=y^*\in S_n$ 的組 (x^*, y^*)，使下面不等式 (10.6) 和 (10.7) 成立：

$$v\geqslant M(\alpha_i, y) \quad (i=1, \cdots, m), \tag{10.6}$$

$$v\leqslant M(x, \beta_j) \quad (j=1, \cdots, n). \tag{10.7}$$

証明 代替不等式 (10.7)，看下面的不等式：

$$w\leqslant M(x, \beta_j) \quad (j=1, \cdots, n). \tag{10.8}$$

很明显，使不等式 (10.6) 和 (10.8) 成立的实数 v，w 和 $x=(x_1, \cdots, x_m)\in S_m$，$y=(y_1, \cdots, y_n)\in S_n$ 是存在的。現对 (10.6) [(10.8)] 的两边分别乘以 x_i [y_j]，并对所有的 i [j] 相加，则有

$$w\leqslant M(x, y)\leqslant v, \tag{10.9}$$

因而

$$w\leqslant v. \tag{10.10}$$

所以使 (10.6) 成立的 v 有下界，由于 S_n 是有界閉集合，因此 v 有下限 v^*，它对某个 $y^*\in S_n$ 能使 (10.6) 成立。同理 w 有上限 w^*，它对某个 $x^*\in S_m$ 能使 (10.8) 成立。而且由 (10.10)，

$$w^*\leqslant v^*. \tag{10.11}$$

所以若我們能証明

$$w^*=v^*, \tag{10.12}$$

則輔助定理将得到証明。現在对于一般的 $m+n$，用数学归納法証明(10.12)。

若 $m+n=2$，显然 (10.12) 成立。現在假定对于局中人 1, 2 的純策略总数分别为正整数 m' 及 n' 的博奕，(10.12) 是成立的，此处 $m'+n'<m+n$。

于是，若 $v=v^*$，$w=w^*$，如果取 x^*，y^*，能对所有的 i 和所有的 j，分别使(10.6)及(10.8)的等号成立，則用推导(10.9)的同样手續就可得到

$$w^*=M(x^*, y^*)=v^*,$$

所以(10.12)是成立的。此外，如果这时(10.6)[(10.8)]对于所有的 $i[j]$ 成立严格的不等号，則与 $v^*[w^*]$ 的下限[上限]性质矛盾。因此，当 $v=v^*[w=w^*]$ 时，必有 $y^*[x^*]$，使 (10.6)[(10.8)] 对某些 $i[j]$ 成立不等号，同时对另一些 $i[j]$，成立等号。因而，不失一般性，对于 v^* 和 y^*，可假定不等式(10.6)成立的形式为

$$v^*=M(\alpha_i, y^*) \quad (i=1, \cdots, m_1), \tag{10.13}$$

$$v^*>M(\alpha_i, y^*) \quad (i=m_1+1, \cdots, m). \tag{10.14}$$

这时局中人 1 的純策略縮小为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m_1}$，局中人 2 的純策略仍然是 $\beta_1, \cdots, \beta_n$。考察縮小的博奕 G^*。設这个博奕的混合扩充博奕为 Γ^*，并設使不等式(10.6)和(10.8)成立的 v 的下限和 w 的上限分别为 v_1 和 w_1。

由于使 (10.6) 对 $i=1, \cdots, m$ 成立的 v 的值和 y 当然也能使 (10.6) 对 $i=1, \cdots, m_1$ 成立，所以

$$v_1\leqslant v^*. \tag{10.15}$$

此外，对于縮小的博奕 Γ^*，取使 (10.8) 成立的 w 与 $x'=(x_1, \cdots, x_{m_1})$，而后将 x' 扩大，作 $x=(x_1, \cdots, x_{m_1}, 0, \cdots, 0)\in S_m$。这样的 w 和 x，在原来的博奕 Γ 上，能使(10.8)成立。所以

$$w_1\leqslant w^*. \tag{10.16}$$

現在来証明

$$v_1=v^*. \tag{10.17}$$

为此,設(10.17)不成立,由(10.15)有

$$v_1<v^*. \tag{10.18}$$

因此,v_1 就是在縮小的博奕 Γ^* 上,对于 $y'=(y'_1, \cdots, y'_n)\in S_n$,使对应于(10.6)的不等式成立的 v,也就是

$$v_1\geqslant M(\alpha_i, y'), \quad (i=1, \cdots, m_1). \tag{10.19}$$

此时,取实数 ν,$0<\nu<1$,作向量 $y=\nu y^*+(1-\nu)y'\in S_n$,由函数 M 的綫性性質,得到

$$M(\alpha_i, y)=\nu M(\alpha_i, y^*)+(1-\nu)M(\alpha_i, y'). \tag{10.20}$$

但对于 $i=1, \cdots, m_1$,由(10.13),(10.19)和假定(10.18)得知

$$v^*>\nu M(\alpha_i, y^*)+(1-\nu)M(\alpha_i, y'). \tag{10.21}$$

所以由(10.20),(10.21)有

$$v^*>M(\alpha_i, y) \quad (i=1, \cdots, m_1). \tag{10.22}$$

由于对 $i=m_1+1, \cdots, m$,(10.14)成立,所以若 ν 充分接近于 1 时,(10.21)即(10.22),对于 $i=m_1+1, \cdots, m$ 也成立。从而 v^* 不是使(10.6)成立的 v 的下限,得到矛盾。所以(10.18)不成立,因而(10.17)成立。

此外,由归納法的假定,

$$w_1=v_1. \tag{10.23}$$

所以由(10.17),(10.23)和(10.16)得

$$v^*\leqslant w^*. \tag{10.24}$$

从而,由(10.11),(10.24)可知(10.12)成立。所以本輔助定理得証。 証毕

定理 10.1 (基本定理或 minimax 定理) 任意矩陣博奕 $G=(A, B, M)$ 的混合扩充博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$,恒存在平衡点。

証明　輔助定理10.2，实质上是說在混合扩充博奕 Γ 中，定理9.1的条件(3)是成立的。从而定理9.1的三个命题 (1)，(2)，(3)并不是假定的条件，而是在博奕 Γ 中实际成立的命題。　証毕

注意 10.1　由于定理10.1的成立，故系9.1的命题 (a)，(b) 在博奕 Γ 上成立。

定义 10.1　設矩陣博奕 $G=(A, B, M)$ 的混合扩充博奕 Γ 中，已知存在的平衡点为 (x^0, y^0)，則

(a) 局中人1，2的策略組 (x^0, y^0) 称为**博奕 Γ 的解**。

(b) x^0 称为局中人1的**最优策略**，y^0 称为局中人2的**最优策略**。

(c) $M(x^0, y^0)$ 称为**博奕 Γ 的值**，用 v_Γ 表示。

因此，定理10.1可改述如下：

定理 10.1′　任意矩陣博奕的混合扩充矩陣恒存在着解。

此外，根据注意10.1，应注意下面事項。

注意 10.2　在博奕 Γ 中，下面三个策略是等价的：(1) 局中人1的 maximin 策略，(2) 局中人1的最优策略，(3)使 $v_\Gamma=\min_y M(x^0, y)$ 的策略 x^0；(1′) 局中人2的 minimax 策略，(2′) 局中人2的最优策略，(3′) 使 $v_\Gamma=\max_x M(x, y^0)$ 的策略 y^0。

再者，在§7中所說的关于矩陣博奕平衡点的性质 (iii)，很明显对于混合扩充博奕也同样成立，且可以用同样的方法得到証明。也就是說下面定理成立。

定理 10.2　設 (x^0, y^0) 与 (x^*, y^*) 为博奕 Γ 的任意两个平衡点，下面关系成立：

(a) (x^0, y^*)，(x^*, y^0) 也是平衡点(可換性)，

(b) $M(x^0, y^0)=M(x^0, y^*)=M(x^*, y^0)=M(x^*, y^*)$。

最后叙述最优策略的一个性质。

定理 10.3　設在博奕 Γ 中，局中人1，2的任意最优策略分别

为 $x^*=(x_1^*, \cdots, x_m^*)$，$y^*=(y_1^*, \cdots, y_n^*)$，博奕的值为 v_Γ，則对于

$$M(\alpha_i, y^*) < v_\Gamma \tag{10.25}$$

的 α_i，有 $x_i^*=0$，对于

$$M(x^*, \beta_j) < v_\Gamma \tag{10.26}$$

的 β_j，有 $y_j^*=0$.

証明 对于使(10.25)成立的 α_i，設 $x_i^*>0$. 則

$$M(\alpha_i, y^*)x_i^* < v_\Gamma x_i^*, \tag{10.27}$$

此外很明显

$$M(\alpha_h, y^*)x_h^* \leq v_\Gamma x_h^* \quad (h=1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m). \tag{10.28}$$

所以由 (10.27)，(10.28)，

$$\sum_{h=1}^{m} M(\alpha_h, y^*)x_h^* = M(x^*, y^*) < v_\Gamma \sum_{h=1}^{m} x_h^* = v_\Gamma.$$

这和(x^*, y^*)是博奕 Γ 的平衡点相矛盾，同样，当 $x_i^*<0$ 时也能得出矛盾。所以 $x_i^*=0$. 証毕

§ 11 矩陣博奕的基本解

設矩陣博奕 $G=(A, B, M)$的混合扩充博奕为 Γ. 本节研究在 Γ 中，局中人 1，2 的策略全体的集合 S_m，S_n 内他們的最优策略集合的結构問題。

局中人 1，2 的一般混合策略分别用 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_m)\in S_m$，$\eta=(\eta_1, \cdots, \eta_n)\in S_n$ 表示，局中人 1 的最优策略記作 $x=(x_1, \cdots, x_m)$，它的全体的集合記作 $X(\subset S_m)$，局中人 2 的最优策略記作 $y=(y_1, \cdots, y_n)$，它的全体的集合記作 $Y(\subset S_n)$. 由 § 10 可知，取任意的 $x\in X$ 和任意的 $y\in Y$ 时，它們的策略組(x, y)是 Γ 的解，且博奕 Γ 的解完全是这样的組。我們的目的是要了解 X，Y 的构造形式。首先有下面的定理。

定理 11.1 局中人1，2的最优策略集合 X 和 Y，都是非空，有界，凸的閉集合。

証明 由定理 10.1 可知 X，Y 不是空集合。本定理只就集合 X 来証明。由于 S_m 是有界的，故显然 X 是有界的。

(a) X 是凸的：設 X 的元素的任意凸綫性組合为 ξ_0，也就是对于任意的 $x^{(h)}\in X$，$h=1, \cdots, r$ 和任意的实数 $a_h\geqslant 0$，$h=1, \cdots, r$，$\sum_h a_h=1$，設

$$\xi_0=\sum_h a_h x^{(h)}. \tag{11.1}$$

因为 S_m 是凸的，所以 $\xi_0\in S_m$。

設博奕 Γ 的值为 v_Γ，則

$$\min_\eta M(\xi_0, \eta)\leqslant \max_\xi \min_\eta M(\xi, \eta)=v_\Gamma. \tag{11.2}$$

此外，根据 $M(\xi, \eta)$ 的綫性性质，

$$\begin{aligned}\min_\eta M(\xi_0, \eta) &=\min_\eta \sum_h a_h M(x^{(h)}, \eta)\\ &\geqslant \sum_h a_h \min_\eta M(x^{(h)}, \eta)=\sum_h a_h v_\Gamma=v_\Gamma,\end{aligned} \tag{11.3}$$

所以由 (11.2)，(11.3) 可知

$$\min_\eta M(\xi_0, \eta)=v_\Gamma. \tag{11.4}$$

即 ξ_0 是局中人1的最优策略，且 $\xi_0\in X$，所以 X 是凸的。

(b) X 是閉集合：設 $\xi_0=\lim_{h\to\infty} x^{(h)}$，在此 $x^{(h)}\in X$，$h=1, 2, \cdots$。由于 S_m 是閉集合，所以 $\xi_0\in S_m$。对于 ξ_0，显然 (11.2) 是成立的。又由 $M(\xi, \eta)$ 的綫性性质，得

$$\min_\eta M(\xi_0, \eta)=\min_\eta \lim_{h\to\infty} M(x^{(h)}, \eta). \tag{11.5}$$

但 $x^{(h)}\in X$，所以对于所有的 $\eta\in S_n$，

$$M(x^{(h)}, \eta)\geqslant v_\Gamma \quad (h=1, 2, \cdots).$$

因此，对于所有的 $\eta\in S_n$，

$$\lim_{h\to\infty} M(x^{(h)}, \eta)\geqslant v_\Gamma. \tag{11.6}$$

从而由 (11.5), (11.6) 可知

$$\min_{\eta} M(\xi_0, \eta) \geq v_\Gamma. \tag{11.7}$$

所以由 (11.2), (11.7) 知

$$\min_{\eta} M(\xi_0, \eta) = v_\Gamma$$

成立, $\xi_0 \in X$. 所以 X 是閉集合。 証毕

設 Z 是 r 維向量空間的集合, z^* 为 Z 中的点。若任取 Z 中两个相异的点 $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, 都不能使

$$z^* = \frac{1}{2}(z^{(1)} + z^{(2)})$$

成立,則称这样的 z^* 为 Z 的端点(extreme point)。Z 的端点全体的集合称为 Z 的端点集合,用 Z^* 表示。

輔助定理 11.1 設 Z 是 r 維向量空間的非空,有界,凸的閉集合。則 Z 的端点集合 Z^* 是非空的,且 Z 是含有 Z^* 的最小的凸集合。

証明可参考 Blackwell and Girshick[1]。

在博奕 Γ 中, 若局中人 1, 2 的最优策略全体的集合分别为 X, Y, 由定理 11.1 和輔助定理 11.1, 可知 X, Y 的端点集合 X^*, Y^* 都不是空集合。因此,引人下面定义。

定义 11.1 X^* 的元素 x^* 和 Y^* 的元素 y^*, 分别称为局中人 1, 2 的**基本最优策略**, 它們的組 (x^*, y^*), 称为博奕 Γ 的**基本解** (basic solution)。

由輔助定理 11.1, 可得下面定理。

定理 11.2 博奕 Γ 的解全体的集合,可由局中人 1, 2 的基本最优策略集合 X^* 和 Y^* 完全确定。也就是局中人 1, 2 的策略組 (x, y), 只有当 x, y 分别是 X^*, Y^* 的元素的凸綫性組合时,才是博奕的解。

因此,我們为了知道博奕Γ的解的全体集合,只要知道X^*和Y^*的构造卽可。

博奕$G=(A, B, M)$的赢得矩陣也用M表示,卽

$$M=(M(\alpha_i, \beta_j))=(a_{ij}).$$

矩陣M的第i行用A_i,第j列用B_j表示,也就是

$$A_i=(a_{i1}, \cdots, a_{in}), \quad B_j=(a_{1j}, \cdots, a_{mj})^T ❶,$$
$$i=1, \cdots, m; \quad j=1, \cdots, n.$$

此外还使用下面記号:

$$J_r=(1, 1, \cdots, 1), \quad O_r=(0, 0, \cdots, 0),$$

此处,J_r, O_r的分量数目是r个。

今后要根据需要,使用从赢得矩陣$M=(a_{ij})$中去掉某行[列]所得的子矩陣。从策略$x=(x_1, \cdots, x_m)$[$y=(y_1, \cdots, y_n)$]中去掉与矩陣中去掉的行[列]相对应的元素所得的向量用$\dot{x}$[$\dot{y}$]表示。

定理 11.3　設博奕$\Gamma=(A, B, M)^*$的値v_Γ异于0,则局中人1,2的最优策略x,y是基本最优策略的充要条件为存在赢得矩陣M的满秩子矩陣(non-singular submatrix) $\dot{M}$($r\times r$矩陣),使得:

$$\dot{x}=\frac{J_r\dot{M}^{-1}}{J_r\dot{M}^{-1}J_r^T}, \tag{11.8}$$

$$\dot{y}=\frac{J_r(\dot{M}^{-1})^T}{J_r\dot{M}^{-1}J_r^T}, \tag{11.9}$$

$$v_\Gamma=\frac{1}{J_r\dot{M}^{-1}J_r^T}. \tag{11.10}$$

証明　預备:設在赢得矩陣M中,去掉了和局中人1, 2的最优策略$x=(x_1, \cdots, x_m)$, $y=(y_1, \cdots, y_n)$的零分量对应的行和列后,所得的子矩陣为M_1。为了不失一般性,可假定

---

❶ 一般,以A^T表矩陣A的轉置矩陣。

$$x_i \neq 0, \quad y_j \neq 0 \quad (i=1, \cdots, m'; \quad j=1, \cdots, n'),$$
$$x_i = 0, \quad y_j = 0 \quad (i=m'+1, \cdots, m;$$
$$j=n'+1, \cdots, n),$$
$$1 \leqslant m' \leqslant m, \quad 1 \leqslant n' \leqslant n. \qquad (11.11)$$

則 M_1 是 $m' \times n'$ 矩陣。現在設存在有使 (11.8) ~ (11.10) 成立的 $r \times r$ 滿秩子矩陣 $\dot{M}$，則

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = \dot{x} J_r^T = \frac{J_r \dot{M}^{-1} J_r^T}{J_r \dot{M}^{-1} J_r^T} = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{r} y_j = \dot{y} J_r^T = \frac{J_r (\dot{M}^{-1})^T J_r^T}{J_r \dot{M}^{-1} J_r^T} = 1,$$

而 $r \geqslant m'$，$r \geqslant n'$，所以 M_1 是 $\dot{M}$ 的子矩陣(用記号 $\dot{M} \supset M_1$ 表示)。

其次，在矩陣 My^T 和 xM 中有其值异于 v_Γ 的分量，設在 M 中去掉与这些分量相当的行与列，記所得的子矩陣为 M_2，M_2 是 $m'' \times n''$ 矩陣。則由 (11.8) ~ (11.10) 得

$$\dot{M} \dot{y}^T = v_\Gamma J_r^T, \quad \dot{x} \dot{M} = v_\Gamma J_r, \qquad (11.12)$$

所以 $m'' \geqslant r$，$n'' \geqslant r$。即 $\dot{M}$ 是 M_2 的子矩陣。注意，由于矩陣 $\dot{M}$ 滿足 (11.8) ~ (11.10)，所以

$$M_1 \subset \dot{M} \subset M_2. \qquad (11.13)$$

充分性：設对于局中人 1, 2 的最优策略 x, y，条件 (11.8) ~ (11.10) 成立，但 $x \notin X^*$，$y \notin Y^*$。我們将証明，假設 $x \notin X$ 将导出矛盾的結論。(对于假設 $y \notin Y^*$，同样可得出矛盾結論。) 由于 $x \notin X^*$，所以存在有两个不同的最优策略 $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in X$，使得 $x = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(2)})$。因而

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(\dot{x}^{(1)} + \dot{x}^{(2)}), \qquad (11.14)$$

很明显，为了作 $\dot{x}^{(1)}$, $\dot{x}^{(2)}$，所去掉的 $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ 的分量全部是 0。設 $\dot{B}_j$ 是 $\dot{M}$ 的第 j 列的列向量，則

$$\dot{x}^{(1)}\dot{B}_j = x^{(1)}B_j \geqslant v_\Gamma, \text{ 且 } \dot{x}^{(2)}\dot{B}_j = x^{(2)}B_j \geqslant v_\Gamma. \tag{11.15}$$

此外由 (11.12), (11.14) 得

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^{(1)} + \dot{x}^{(2)})\dot{B}_j = v_\Gamma. \tag{11.16}$$

所以从 (11.15), (11.16) 得

$$\dot{x}^{(1)}\dot{M} = v_\Gamma J_r = \dot{x}^{(2)}\dot{M},$$

即下式成立：

$$(\dot{x}^{(1)} - \dot{x}^{(2)})\dot{M} = O_r. \tag{11.17}$$

但 $\dot{x}^{(1)} \neq \dot{x}^{(2)}$, 因此(11.17)与矩陣 $\dot{M}$ 是滿秩的假設矛盾。

必要性：設 $x \in X^*$, $y \in Y^*$. 我們要构造 M 的一个滿足(11.8)~(11.10)的子矩陣 $\dot{M}$. 为此，从矩陣 M_1 出发，象下面那样，順次地添加行和列。

首先，对于 M_1 添上属于 M_2 而不属于 M_1 的行，这行应与 M_1 的行同长。添加的时候按下面的規則进行：如果所考察的行与 M_1 的行綫性无关，則将此行添上，否則就将此行舍弃，再取第二行，如此順次进行，所取的行与 M_1 及已添入的行都綫性无关时即作为新行添入，否則舍弃。为了不失一般性，設添加行的番号为 $m'+1, \cdots, s(\leqslant m'')$.

此外，对于 M_1 的列，也和上面同样进行添加属于 M_2 而不属于 M_1 的列，这些列应与 M_1 的列同长。为了不失一般性，設添入的列的番号为 $n'+1, \cdots, t(\leqslant n'')$.

設用 M 的第 $1, 2, \cdots, s$ 行和第 $1, 2, \cdots, t$ 列所构成的 $s \times t$ 矩陣为 $\dot{M}_0$. 此矩陣称为基本解 (x, y) 的核 (kernel)。核是依賴于添加在 M_1 上的行和列的次序而确定的，但它并不是唯一的。現在将矩陣 $\dot{M}_0$ 的第 i 行，第 j 列分別記为

$$H_i = (a_{i1}, \cdots, a_{it}), \quad (i=1, \cdots, s),$$

$$D_j = (a_{1j}, \cdots, a_{sj})^T, \quad (j=1, \cdots, t).$$

設矩陣 $\dot{M}_0$ 是降秩的，假設 $\dot{M}_0$ 的行綫性相关（由于 $\dot{M}_0$ 的构成方法对于行和列完全一样，所以若列是綫性相关，下面的討論同样有效），則存在不完全是 0 的实数 $c_1, \cdots, c_s$，使下式成立：

$$\sum_{i=1}^{s} c_i H_i = O_t. \tag{11.18}$$

現在設 $c_{m'+1}, \cdots, c_s$ 中 c_h 不为零。則由 (11.18) 知 H_h 和其余的 $H_1, \cdots, H_{h-1}, H_{h+1}, \cdots, H_s$ 綫性相关。这和 $\dot{M}_0$ 的构作方法矛盾（当然，构成 $\dot{M}_0$ 时，我們决定添加与否的向量是向量 H_i 的部分向量，但是这些向量如果綫性无关，則扩充的向量組 H_i 当然也綫性无关）。从而 (11.18) 中，

$$c_h=0 \quad (h=m'+1, \cdots, s). \tag{11.19}$$

設对于使 (11.18) 成立的 $c_i (i=1, \cdots, s)$，添加上

$$c_{s+1}=\cdots=c_m=0 \tag{11.20}$$

所得的 m 維向量为 c，即

$$c=(c_1, \cdots, c_m)=(c_1, \cdots, c_{m'}, 0, \cdots, 0). \tag{11.21}$$

那末，$H_i=(a_{i1}, \cdots, a_{it})$ 是含于 M_2 中的 $\dot{M}_0$ 的行，所以由 M_2 的定义，

$$H_i\dot{y}^T=A_i\dot{y}^T=v_\Gamma \quad (i=1, \cdots, s). \tag{11.22}$$

因而由 (11.18)，(11.22) 得

$$\sum_{i=1}^{s} c_i v_\Gamma=\sum_{i=1}^{s} c_i H_i\dot{y}^T=\left(\sum_{i=1}^{s} c_i H_i\right)\dot{y}^T=O_t\dot{y}^T=0. \tag{11.23}$$

可是由假定 $v_\Gamma \neq 0$，因此由 (11.23)，可知

$$\sum_{i=1}^{s} c_i=0. \tag{11.24}$$

所以由 (11.24) 和向量 c 的构造 (11.21)，得

$$\sum_{i=1}^{m} c_i=0. \tag{11.25}$$

其次，取充分小的正数 ε，构造向量 $x \pm \varepsilon c$，使得它的分量，适

合条件

$$x_i \pm \varepsilon c_i \geq 0 \quad (i=1, \cdots, m'). \tag{11.26}$$

又由 (11.11), (11.19) 和 (11.20) 可知，不論正数 ε 的值如何，总有

$$x_i \pm \varepsilon c_i = 0 \quad (i=m'+1, \cdots, m). \tag{11.27}$$

又由(11.25)，

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i \pm \varepsilon c_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \tag{11.28}$$

所以由(11.26)～(11.28)得到

$$x \pm \varepsilon c \in S_m. \tag{11.29}$$

另一方面，对于 $\dot{M}_0$ 的第 j 列 $D_j = (a_{1j}, \cdots, a_{sj})^T$，从(11.18)得到

$$(c_1, \cdots, c_s) D_j = 0 \quad (j=1, \cdots, t). \tag{11.30}$$

从而根据向量 c 的定义(11.21)和(11.30)，对于矩陣 M 的第 j 列 B_j，下面的关系成立：

$$cB_j = 0 \quad (j=1, \cdots, t). \tag{11.31}$$

那末根据矩陣 $\dot{M}_0$ 的构成方法，对于 $t<k\leq n''$ 的任意的 k，向量 $\dot{D}_k = (a_{1k}, \cdots, a_{m'k})^T$ 和向量 $\dot{D}_1, \cdots, \dot{D}_t$ 綫性相关。因而存在实数 $d_1, \cdots, d_t$，使得

$$\dot{D}_k = d_1\dot{D}_1 + \cdots + d_t\dot{D}_t. \tag{11.32}$$

所以由 (11.21), (11.32) 和 (11.31)，下面等式成立：

$$\begin{aligned} cB_k = \dot{c}\dot{D}_k = \dot{c}\left(\sum_{j=1}^{t} d_j\dot{D}_j\right) \\ = c\left(\sum_{j=1}^{t} d_jB_j\right) = \sum_{j=1}^{t} d_j(cB_j) = 0, \\ t<k\leq n''. \end{aligned} \tag{11.33}$$

用 (11.31), (11.33) 得

$$(x \pm \varepsilon c)B_j = xB_j = v_\Gamma \quad (j=1, \cdots, n''). \tag{11.34}$$

另一方面，当 $j>n''$ 时，由 n'' 的定义，

$$xB_j > v_\Gamma \quad (n'' < j \leq n). \tag{11.35}$$

所以根据 (11.34), (11.35), 当正数 ε 充分小时,下式成立:

$$\min_{j=1,\cdots,n} (x \pm \varepsilon c) B_j = v_\Gamma. \tag{11.36}$$

由 (11.29), (11.36) 可知 $x \pm \varepsilon c$ 是局中人 1 的最优策略。即 $x \pm \varepsilon c \in X$. 这与 $x \in X^*$ 相矛盾。

因而矩阵 $\dot{M}_0$ 的各行是綫性无关的,同样 $\dot{M}_0$ 的各列也是綫性无关的,从而 $\dot{M}_0$ 是满秩矩陣,且 $s = t (= r)$, 故矩陣

$$\dot{M}_0 = (a_{ij}) \quad (i, j = 1, \cdots, r) \tag{11.37}$$

是满秩的。可以証明这个矩陣 $\dot{M}_0$ 满足条件 (11.8) ~ (11.10). 由 $\dot{M}_0$ 的构成方法,很明显,設 $\dot{x} = (x_1, \cdots, x_r)$, $\dot{y} = (y_1, \cdots, y_r)$ 时,則

$$\dot{x}\dot{M}_0 = v_\Gamma J_r, \quad \dot{M}_0 \dot{y}^T = v_\Gamma J_r^T. \tag{11.38}$$

但矩陣 $\dot{M}_0$ 是满秩的,所以由 (11.38),

$$\dot{x} = v_\Gamma J_r \dot{M}_0^{-1}, \quad \dot{y}^T = v_\Gamma \dot{M}_0^{-1} J_r^T. \tag{11.39}$$

又

$$1 = \dot{x} J_r^T = v_\Gamma J_r \dot{M}_0^{-1} J_r^T. \tag{11.40}$$

因此,由 (11.39), (11.40), 用满秩矩陣 $\dot{M}_0$, 可得 (11.8) ~ (11.10) 的表示式。 証毕

定理 11.4 博奕 $\Gamma = (A, B, M)^*$ 的解 $x = (x_1, \cdots, x_m)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ 为基本解的充要条件是存在有矩陣 M 的满秩子矩陣 $\dot{M}$ ($r \times r$ 矩陣), $J_r (\mathrm{adj}\, \dot{M}) J_r^T \neq 0$, 且下面条件成立:

$$\dot{x} = \frac{J_r \,\mathrm{adj}\, \dot{M}}{J_r (\mathrm{adj}\, \dot{M}) J_r^T}, \tag{11.41}$$

$$\dot{y} = \frac{J_r (\mathrm{adj}\, \dot{M})^T}{J_r (\mathrm{adj}\, \dot{M}) J_r^T}, \tag{11.42}$$

$$v_\Gamma = \frac{|\dot{M}|}{J_r (\mathrm{adj}\, \dot{M}) J_r^T}, \tag{11.43}$$

此处 $\dot{x}[\dot{y}]$ 是从 $x[y]$ 中去掉与构成 $\dot{M}$ 时，从 M 中去掉的行[列]相对应的分量所得的向量。

証明　(i) $v_\Gamma \neq 0$ 时：这时只在 $\dot{M}$ 是滿秩矩陣时，(11.43)才成立。因为可以看出，若 $\dot{M}$ 滿秩，则

$$\operatorname{adj} \dot{M} = |\dot{M}| \dot{M}^{-1},$$

由定理 11.3 直接可知本定理成立。

(ii) $v_\Gamma = 0$ 时：这时任意取一个常数 $b \neq 0$，用下面的赢得构成新博奕 $\Gamma' = (A, B, M)^*$：

$$M'(\alpha_i, \beta_j) = M(\alpha_i, \beta_j) + b = a_{ij} + b, \quad \begin{matrix} i = 1, \cdots, m; \\ j = 1, \cdots, n. \end{matrix} \tag{11.44}$$

即这个博奕 Γ' 的赢得矩陣 M' 是 $M' = (a_{ij} + b)$。因而博奕 Γ' 的值是

$$v_{\Gamma'} = v_\Gamma + b \neq 0, \tag{11.45}$$

博奕 Γ' 中的局中人 1, 2 的最优策略集合分别用 X', Y' 表示，很明显，

$$X', Y', X'^*, Y'^* = X, Y, X^*, Y^*. \tag{11.46}$$

从而根据(11.45)，由(i)的証明可得出，为要 x, y 是博奕 Γ' 的基本解（根据 (11.46)，x, y 为博奕 Γ 的基本解），其充要条件是存在矩陣 M' 的滿秩子矩陣 $\dot{M}'$（$r \times r$ 矩陣），$J_r(\operatorname{adj}\dot{M}')J_r^T \neq 0$ 且使得：

$$\begin{gathered} \dot{x} = \frac{J_r \operatorname{adj} \dot{M}'}{J_r(\operatorname{adj} \dot{M}')J_r^T}, \quad \dot{y} = \frac{J_r(\operatorname{adj} \dot{M}')^T}{J_r(\operatorname{adj} \dot{M}')J_r^T}, \\ v_{\Gamma'} = v_\Gamma + b = \frac{|\dot{M}'|}{J_r(\operatorname{adj} \dot{M}')J_r^T}. \end{gathered} \tag{11.47}$$

由矩陣計算，容易知道（例如参考 McKinsey[3]）下面关系成立：

$$\begin{gathered} J_r \operatorname{adj} \dot{M}' = J_r \operatorname{adj} \dot{M}, \\ |\dot{M}'| = |\dot{M}| + bJ_r(\operatorname{adj} \dot{M})J_r^T. \end{gathered} \tag{11.48}$$

因而将(11.48)代入(11.47)，得(11.41)～(11.43)，所以定理得証。　　証毕

定理 11.5 博奕 $\Gamma=(A, B, M)$ 有有限个基本解，且局中人1, 2 的最优策略集合 X, Y 都构成多面体。

証明 根据定理 11.4，博奕 Γ 的贏得矩陣 M 的子方陣一定是博奕 Γ 的某一个基本解的核。反之，任意的基本解的核都和某一个 M 的子方陣相对应。因而基本解的数不能超过矩陣 M 的子方陣的数目，所以 X^*, Y^* 都是由有限个元素所組成。又因为集合 X, Y 分别是 X^*, Y^* 的凸集合，所以 X, Y 每一个都是以 X^*, Y^* 为頂点的多面体。　　証毕

注意 11.1 矩陣博奕所有解的确定法：根据定理 11.4，我們能够系統地求出任意矩陣博奕 $G=(A, B, M)$ 的混合扩充博奕 Γ 的所有解。即按下面次序进行。

(1) 取贏得矩陣 M 的 r 阶子方陣 $\dot{M}$, $r=1, 2, \cdots, \min(m, n)$.

(2) 根据公式 (11.41)～(11.43) 計算向量 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 和值 v_r，然后檢驗 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 是否屬于 S_r.

(3) 若 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 不同时屬于 S_r，将这个子矩陣舍去。

(4) 若 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 同时屬于 S_r，在 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 的对应于由 M 作矩陣 $\dot{M}$ 时去掉的行和列的位置上，都添加分量 0，分别扩大为 m 維，n 維的向量 x, y. 然后檢驗下面条件是否成立：

$$M(\alpha_i, y)\leqslant v_r\leqslant M(x, \beta_j) \quad (i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n). \tag{11.49}$$

(5) 若 x, y 不滿足条件 (11.49)，将这个 x, y 舍去。

(6) 若 x, y 滿足条件 (11.49)，則 (x, y) 就是博奕 Γ 的基本解。

按照这样作法，从矩陣 M 的所有子方陣得到的所有基本解 (x, y)，就是博奕 Γ 的全部基本解。若博奕 Γ 的所有基本解已能求出，依照定理 11.2 就能得出博奕 Γ 的所有解。

注意 11.2 作为矩陣博奕的解法，注意 11.1 所述的方法并不是最有效的方法。有时也可用綫性規划的計算法，和几何学上的图象来解更为便利(参考 Luce and Raiffa [2])。关于这些計算法，在此不另作介紹了。

§12　2人无限零和博奕

到現在为止我們只是在局中人的純策略数目为有限(有限博奕)的前提下进行了討論。下面将考察这个前提不存在时的2人零和博奕(2人无限零和博奕)。

設局中人1, 2的純策略α, β全体的集合分别为A与B(无限集合),局中人1, 2分别取純策略α, β时,局的結果对局中人1的期望效用(贏得)为$M(\alpha, \beta)$,对局中人2的贏得为$-M(\alpha,\beta)$。設由集合A, B的子集合所构成的某Borel集合体分别为$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$,其上的概率測度ξ及η分别称为局中人1, 2的混合策略。局中人1, 2的混合策略全体的集合分别記为Ξ与H. 局中人1取混合策略ξ的意义是:使用純策略$\alpha\in A$,按照某一机遇裝置在$\mathfrak{A}$的含有α的任意元素a中,出現α的概率为$\xi(a)$。对于局中人2使用混合策略η,其意义也作同样理解。在博奕$G=(A, B, M)$中,对各局中人可以用混合策略$\xi\in\Xi$, $\eta\in H$的博奕,称为博奕G的混合扩充博奕,用$\Gamma=(A, B, M)^*$表示。局中人1, 2分别用混合策略(以后簡称策略)ξ, η时,局中人1的贏得$M(x, y)$由下式給出:

$$M(\xi, \eta)=\int_A\int_B M(\alpha, \beta)d\xi d\eta. \tag{12.1}$$

本节将研究对于純策略的集合A, B或贏得函数$M(\alpha, \beta)$,在什么条件下,博奕Γ中minimax定理成立,也就是怎样使下面等式成立的問題:

$$\sup_\xi \inf_\eta M(\xi, \eta)=\inf_\eta \sup_\xi M(\xi, \eta). \tag{12.2}$$

在博奕$\Gamma=(A, B, M)^*$中,若等式(12.2)成立,則称此博奕为**完全确定的**(strictly determined)。两边公共的値称为博奕$\Gamma=(A, B, M)^*$的値,用v_Γ或$v(A, B)$表示。如果A, B都是有限集合,

象定理 10.1 中所指出的，博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$ 是完全确定的。但是若 A, B 是无限集合，則由下面的例子可以看出，等式(12.2)并不一定完全成立。

例 12.1 A, B 都是正整数全体的集合，考察用下面式子定义贏得函数 $M(\alpha, \beta)$ 的博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$：

$$M(\alpha, \beta)=\begin{cases} 1, & \text{若 } \alpha>\beta, \\ 0, & \text{若 } \alpha=\beta, \\ -1, & \text{若 } \alpha<\beta. \end{cases}$$

很明显，在这个博奕中，

$$\inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta)=+1, \quad \sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta)=-1.$$

所以它不是完全确定的。

我們再来研究博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$ 是完全确定的意义。和有限博奕的情况一样，使

$$\inf_{\eta} M(\xi^0, \eta) \geqslant \inf_{\eta} M(\xi, \eta), \text{ 对所有的 } \xi \in \Xi \tag{12.3}$$

成立的策略 $\xi^0 \in \Xi$，称为局中人 1 的 maximin **策略**。使

$$\sup_{\xi} M(\xi, \eta^0) \leqslant \sup_{\xi} M(\xi, \eta), \text{ 对所有的 } \eta \in H \tag{12.4}$$

成立的策略 $\eta^0 \in H$，称为局中人 2 的 minimax **策略**。若博奕 Γ 为完全确定的，当局中人 1 的 maximin 策略 ξ^0，和局中人 2 的 minimax 策略 η^0 存在时，它們就是博奕的平衡点，于是和有限博奕的情形一样，可以証明，对所有的 $\xi \in \Xi$，$\eta \in H$，下面不等式成立：

$$M(\xi, \eta^0) \leqslant M(\xi^0, \eta^0)=v_\Gamma \leqslant M(\xi^0, \eta). \tag{12.5}$$

从而，若博奕 Γ 为完全确定的，可以局中人 1 的 maximin 策略 ξ^0 和局中人 2 的 minimax 策略 η^0 的組 (ξ^0, η^0) 定义为博奕 Γ 的**解**，将 v_Γ 定义为博奕 Γ 的**值**。相反，若博奕 Γ 不是完全确定的，这时和有限博奕的情况一样，不存在博奕的平衡点，因而也談不到博奕的解。

又若博奕 Γ 是完全确定的，虽然有时不存在 maximin 策略，或者 minimax 策略，但对于任意的正数 ε，很明显地，总存在有满足下面条件的局中人 1, 2 的策略 ξ^*, η^*:

$$\inf_{\eta} M(\xi^*, \eta) \geqslant v_{\Gamma} - \varepsilon, \ \sup_{\xi} M(\xi, \eta^*) \leqslant v + \varepsilon. \qquad (12.6)$$

这样，策略 ξ^*, η^* 分别称为局中人 1, 2 的 **ε—最优策略。**

和輔助定理 9.1 一样，在无限博奕的情况，下面輔助定理成立。

輔助定理 12.1 下面不等式成立:

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) \leqslant \inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta). \qquad (12.7)$$

在局中人 1, 2 的純策略集合 A 和 B 上，用下列式子定义距离 δ_B 及 δ_A:

$$\delta_B(\alpha_1, \alpha_2) = \sup_{\beta \in B} |M(\alpha_1, \beta) - M(\alpha_2, \beta)| \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in A), \qquad (12.8)$$

$$\delta_A(\beta_1, \beta_2) = \sup_{\alpha \in A} |M(\alpha, \beta_1) - M(\alpha, \beta_2)| \quad (\beta_1, \beta_2 \in B). \qquad (12.9)$$

显然，函数 δ_B, δ_A 满足距离的条件。但是 A 或 B 的两个不同元素間的距离，可能为零。現在用 a_α 表示到 A 的任意元素 α 距离为零的所有元素集合。則对于 A 的任意两个元素 α', α'', 显然，只有两种可能性：或者 $a_{\alpha'} \cap a_{\alpha''} = 0$, 或者 $a_{\alpha'} = a_{\alpha''}$. 記这种子集全体的集为 A^*, 則对于 A^* 的任意两个不同的元素 α_1^*, α_2^*, 存在有 A 的元素 α_1, α_2, 使得 $\alpha_1^* = a_{\alpha_1}$, $\alpha_2^* = a_{\alpha_2}$. 这时可用下式定义 A^* 中的距离 δ_B^*:

$$\delta_B^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \delta_B(\alpha_1, \alpha_2). \qquad (12.10)$$

这个值 (12.10) 对于 α_1^*, α_2^* 中 A 的任意元素 α_1, α_2 其值不变。

对于空間 B，也可用同样的方法构成距离空間 B^*. 在空間 $A^*[B^*]$ 中，不同的两元素間的距离恒为正。从局中人 1 的行动方針来看，使 $\delta_B(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ 的两个策略 α_1, α_2, 对于局中人 1 并沒有区別。对局中人 2 也是一样。現在，局中人 1, 2 的可取純策略

分别是 A^*, B^* 的元素,对于各元素 $\alpha^*(=a_\alpha)$, $\beta^*(=b_\beta)$ 的赢得函数 $M^*(\alpha^*, \beta^*)$, 有

$$M^*(\alpha^*, \beta^*)=M(\alpha, \beta), \tag{12.11}$$

考虑用此定义的博奕 $\Gamma^*=(A^*, B^*, M^*)$, 也在本质上和博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$是沒有区别的。(用 (12.11)定义的函数 M^*, 显然是确定的, 而与从 α^*, β^* 中 A, B 的元素 α, β 的取法无关。)因而不失一般性,在博奕 $G=(A, B, M)$ 中, 从开始就允許假定 $A[B]$ 的两个不同元素間距离 $\delta_B[\delta_A]$ 是正的,来进行討論。以后我們就总是这样规定。

設含有这样的距离空間 $A[B]$ 的所有开集的最小 Borel 集合体为 $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}]$, 局中人 1[2] 的混合策略 $\xi[\eta]$ 是 $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}]$ 上的任意概率測度。再 A, B 的乘积为 $C=A\times B$, 在 C 的子集合所构成的 Borel 集合体上,含有 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 的任意元素乘积的最小 Borel 集合体为 $\mathfrak{C}$. 赢得函数 $M(\alpha, \beta)$ 是 α, β 的有界可測 $(\mathfrak{C})$ 函数。

輔助定理 12.2 对于博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$, 如果距离空間 A, B 有一个全有界,則另外一个空間也全有界。

証明 現在設空間 A 对于距离 δ_B 全有界。也就是对于任意的正数 ε_1, 存在 A 的元素的有限集合 $a=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, 在 A 中是 ε_1-稠密。卽存在有限集合 $a=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 使得对于任意的元素 $\alpha\in A$, 有 $\min\limits_{1\leq i\leq m}\delta_B(\alpha, \alpha_i)\leqslant\varepsilon_1$. 現在用集合 a, 并用下面的式子定义集合 B 上的距离 δ_a:

$$\delta_a(\beta_1, \beta_2)=\max_{1\leq i\leq m}|M(\alpha_i, \beta_1)-M(\alpha_i, \beta_2)| \quad (\beta_1, \beta_2\in B), \tag{12.12}$$

分几步来进行証明。

(i) 对于任意的正数 ε_2, 存在 B 的有限集合 $b=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$, 在距离 δ_a 的意义下,于 B 中是 ε_2-稠密的:現在假設这个命題(i)不成立,則存在 B 的元素的无限列 $\{\beta_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$, 使

$$\delta_a(\beta_i, \beta_j) > \varepsilon_2 \quad (i \neq j). \tag{12.13}$$

但由假定,函数 $M(\alpha, \beta)$ 是有界的,所以固定任意 $i(i=1, 2, \cdots, m)$, 实数列 $M(\alpha_i, \beta_k)$ $(k=1, 2, \cdots)$有极限点。所以存在无限列 $\{\beta_k\}$ 的子列 $\{\beta_{k_j}\}$, 使

$$\lim_{j\to\infty} M(\alpha_i, \beta_{k_j}) = l_i \quad (i=1, 2, \cdots, m), \tag{12.14}$$

此处 l_i 为极限值。因此,若正整数 N 充分大,当 $j_1, j_2 > N$ 时,

$$|M(\alpha_i, \beta_{k_{j_1}}) - M(\alpha_i, \beta_{k_{j_2}})| < \varepsilon_2 \quad (j=1, \cdots, m) \tag{12.15}$$

成立,所以

$$\delta_a(\beta_{k_{j_1}}, \beta_{k_{j_2}}) < \varepsilon_2, \tag{12.16}$$

这和(12.13)矛盾,所以(i)得証。

(ii) 对任意的 $\beta_1, \beta_2 \in B$, 下面不等式成立:

$$|\delta_A(\beta_1, \beta_2) - \delta_a(\beta_1, \beta_2)| \leqslant 2\varepsilon_1. \tag{12.17}$$

由集合 a 的构成可知,对于任意的 $\alpha \in A$, 存在 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$, 使得

$$\delta_B(\alpha, \alpha_i) = \sup_{\beta \in B} |M(\alpha, \beta) - M(\alpha_i, \beta)| < \varepsilon_1. \tag{12.18}$$

所以,对于任意的 $\alpha \in A$,

$$\begin{aligned}
&|M(\alpha_1, \beta_1) - M(\alpha, \beta_2)| \\
&\quad \leqslant |M(\alpha, \beta_1) - M(\alpha_i, \beta_1)| + |M(\alpha_i, \beta_1) - M(\alpha_i, \beta_2)| \\
&\qquad + |M(\alpha_i, \beta_2) - M(\alpha, \beta_2)| \\
&\quad \leqslant \varepsilon_1 + \delta_a(\beta_1, \beta_2) + \varepsilon_1 = \delta_a(\beta_1, \beta_2) + 2\varepsilon_1,
\end{aligned}$$

从而

$$\delta_A(\beta_1, \beta_2) \leqslant \delta_a(\beta_1, \beta_2) + 2\varepsilon_1.$$

亦即命题(ii)得証。

由 (i), (ii) 可知,在集合 B 中, B 的元素的有限集合 b, 在距离 δ_A 的意义下是 $\varepsilon_2+2\varepsilon_1$-稠密。因为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是任意的正数, 所以空間 B 对于任意的正数 ε, 具有在距离 δ_A 的意义下是 ε-稠密的有限子集合。亦即,若空間 A 全有界,則空間 B 也全有界。証毕

定理 12.1 在博奕 $\Gamma=(A, B, M)^*$ 中,若空間 A, B 有一个

全有界，則博奕 Γ 是完全确定的。也就是說下面等式成立：

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) = \inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta). \tag{12.19}$$

証明 根据輔助定理 12.2，在这个定理的条件下，空間 A, B 都是全有界的。因此，对于任意的正数 ε，存在有 $A[B]$ 的有限子集 $A_1, \cdots, A_m[B_1, \cdots, B_n]$，使得

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i,\ A_i \cap A_j = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\left[B = \sum_{j=1}^{n} B_j,\ B_i \cap B_j = 0 \quad (i \neq j).\right]$$

且各子集合 $A_i[B_j]$ 的直徑不超过 ε。这时从各 $A_i[B_j]$ 中任意取一个元素 $\alpha_i[\beta_j]$，使其固定不变。定义

$$a = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\} \qquad [b = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}].$$

然后，构成用下面式子定义的混合策略 $\xi_a[\eta_b]$，这个式子是对应于局中人 1[2] 的任意混合策略 $\xi[\eta]$，在 $a[b]$ 上的概率分布。即

$$\begin{gathered}\xi_a(\alpha_i) = \xi(A_i) \quad (i = 1, \cdots, m).\\ [\eta_b(\beta_j) = \eta(B_j) \quad (j = 1, \cdots, n).]\end{gathered} \tag{12.20}$$

則对任意的 $\eta \in H$，

$$\begin{aligned}&|M(\xi, \eta) - M(\xi_a, \eta)|\\ &= \left|\sum_i \int_{A_i} M(\alpha, \eta)\, d\xi - \sum_i \int_{A_i} M(\alpha_i, \eta)\, d\xi\right|\\ &\leqslant \sum_i \int_{A_i} |M(\alpha, \eta) - M(\alpha_i, \eta)|\, d\xi \leqslant \sum_i \int_{A_i} \delta_B(\alpha, \alpha_i)\, d\xi\\ &\leqslant \sum_i \int_{A_i} \varepsilon\, d\xi = \varepsilon.\end{aligned}$$

即

$$|M(\xi, \eta) - M(\xi_a, \eta)| \leqslant \varepsilon, \quad \text{对于所有的 } \eta \in H. \tag{12.21}$$

同样，下面不等式也成立：

$$|M(\xi, \eta) - M(\xi, \eta_b)| \leqslant \varepsilon, \quad \text{对于所有的 } \xi \in \Xi. \tag{12.22}$$

現在将本定理分为几步进行証明。

(i) 下面不等式成立:

$$\sup_{\xi}\inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon \leqslant \sup_{\xi_a}\inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b). \tag{12.23}$$

事实上,由 (12.21) 可知,对于任意的 $\xi \in \Xi$, 下面不等式成立:

$$M(\xi, \eta) - \varepsilon \leqslant M(\xi_a, \eta) \quad (\text{对于所有的 } \eta \in H).$$

因此

$$\inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon \leqslant \inf_{\eta} M(\xi_a, \eta). \tag{12.24}$$

現在假定不等式:

$$\sup_{\xi}\inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon > \sup_{\xi_a}\inf_{\eta} M(\xi_a, \eta) \tag{12.25}$$

成立,則存在 A 上的概率測度 ξ^*, 使

$$\inf_{\eta} M(\xi^*, \eta) - \varepsilon > \sup_{\xi_a}\inf_{\eta} M(\xi_a, \eta).$$

因此,取对应于这个概率测度 ξ^* 的概率測度 ξ_a^*, 則

$$\inf_{\eta} M(\xi^*, \eta) - \varepsilon > \inf_{\eta} M(\xi_a^*, \eta),$$

这与 (12.24) 矛盾,所以不等式 (12.25) 不能成立,因而下面不等式成立:

$$\sup_{\xi}\inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon \leqslant \sup_{\xi_a}\inf_{\eta} M(\xi_a, \eta). \tag{12.26}$$

此外,显然有

$$\sup_{\xi_a}\inf_{\eta} M(\xi_a, \eta) \leqslant \sup_{\xi_a}\inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b). \tag{12.27}$$

所以,由 (12.26), (12.27) 可知 (12.23) 成立。

(ii) 同理,下面不等式成立:

$$\sup_{\xi_a}\inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b) \leqslant \sup_{\xi}\inf_{\eta} M(\xi, \eta) + \varepsilon. \tag{12.28}$$

(iii) 由 (12.23), (12.28) 得

$$\begin{aligned}\sup_{\xi}\inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon &\leqslant \sup_{\xi_a}\inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b) \\ &\leqslant \sup_{\xi}\inf_{\eta} M(\xi, \eta) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{12.29}$$

(iv) 和推导不等式(12.29)一样，可得下面不等式：

$$\inf_{\eta}\sup_{\xi} M(\xi, \eta) - \varepsilon \leqslant \inf_{\eta_b}\sup_{\xi_a} M(\xi_a, \eta_b) \leqslant \inf_{\eta}\sup_{\xi} M(\xi, \eta) + \varepsilon. \tag{12.30}$$

(v) 由于可将 ξ_a 和 η_b 看作是有限博奕 $G^* = (a, b, M)$ 中局中人 1 和 2 的混合策略，所以根据对有限博奕已經証明的定理 10.1，下面等式成立：

$$\sup_{\xi_a}\inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b) = \inf_{\eta_b}\sup_{\xi_a} M(\xi_a, \eta_b). \tag{12.31}$$

因而，由 (12.29)～(12.31)，不等式

$$|\sup_{\xi}\inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \inf_{\eta}\sup_{\xi} M(\xi, \eta)| \leqslant 2\varepsilon \tag{12.32}$$

对于任意的正数 ε 成立，从而等式(12.19)成立。 証毕

設在一局博奕中，局中人 1[2] 所取純策略集合为 $C[D]$，如果这个博奕是完全确定的，并存在博奕的值且将这个值表示为 $v(C, D)$，則由定理 12.1 可直接推出下面定理。

定理 12.2 博奕 $\Gamma = (A, B, M)^*$ 中，如果空間 A, B 有一个是全有界，則对于任意的正数 ε，存在 A 的有限子集合 a 和 B 的有限子集合 b，使得

$$|v(A, B) - v(a, B)| \leqslant \varepsilon, \quad |v(A, B) - v(A, b)| \leqslant \varepsilon, \tag{12.33}$$

$$|v(A, B) - v(a, b)| \leqslant \varepsilon. \tag{12.34}$$

証明 現在可指出在定理 12.1 的証明中构成的 A, B 的有限子集合 a, b，具有本定理提出的性质。由(12.26)知

$$\sup_{\xi}\inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon \leqslant \sup_{\xi_a}\inf_{\eta} M(\xi_a, \eta) \leqslant \sup_{\xi}\inf_{\eta} M(\xi, \eta). \tag{12.35}$$

所以如用定理 12.1，不等式(12.35)可写为

$$v(A, B) - \varepsilon \leqslant v(a, B) \leqslant v(A, B). \tag{12.36}$$

这个不等式(12.36)指出(12.33)的前半部是成立的。对于(12.33)的后半部也可以同样証明。此外用定理 12.1 时，不等式 (12.30) 的意义正說明了不等式(12.34)是成立的。 証毕

第4章 非零和博奕

§13 非合作 n 人博奕

到現在为止我們所考察的博奕都是2人零和博奕，也就是两个局中人之間存在眞正对抗关系的博奕；因而在这样的博奕中，两个局中人之間进行协商是沒有意义的，因为对第一个局中人有利的东西，一定对另一个局中人是不利的。所以这是一个非合作博奕。本节所要考察的是保留非合作性质，而去掉零和与局中人数目为2的条件的一般非合作 n 人博奕。

有 n 个局中人 $1, 2, \cdots, n$，局中人 i 可任意选取的有限个純策略为 $\alpha_1^{(i)}, \cdots, \alpha_{m_i}^{(i)}$，这些全体的集合記为 $A_i (i=1, 2, \cdots, n)$。A_i 上的概率分布，亦即局中人 i 的混合策略用 $x^{(i)}=(x_1^{(i)}, \cdots, x_{m_i}^{(i)})$ 或 $x^{(i)}=\sum_j x_j^{(i)}\alpha_j^{(i)}$ 表示(在此 $x_j^{(i)}\geqslant 0$, $\sum_j x_j^{(i)}=1$)。$x^{(i)}$ 全体的集合，构成 (m_i-1) 維单純形 $S^{(i)}$。各局中人在不知道其他局中人的策略情况下，各自独立地，分别选定策略 $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$。这些策略的組用 $\boldsymbol{x}=(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$ 表示。当取这些策略时，根据每局的結果給出局中人 i 的期望效用(称为局中人 i 的**赢得**)，用 $M_i(\boldsymbol{x})$ $(i=1, \cdots, n)$ 表示，另外，各局中人 i 都希望决定策略使自己得到大的赢得 $M_i(\boldsymbol{x})$。这样的博奕，称为**非合作 n 人博奕** (non-cooperative n-person game)。我們所要解决的問題是在这样的博奕中，各局中人的最优策略是什么，或者博奕的解是什么，如何来确定等。

各局中人的策略組 $\boldsymbol{x}=(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$ 全体的集合 Δ，是单純形 $S^{(i)} (i=1, \cdots, n)$ 的直乘积集合，构成有界閉凸集合。策略組 $\boldsymbol{x}=(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$ 中，只有局中人 i 将策略 $x^{(i)}$ 改变为 $y^{(i)}$ 时的策略組用 $(\boldsymbol{x}; y^{(i)})$ 表示。

定义 13.1 非合作 n 人博奕 Γ_n 中，策略組 $\boldsymbol{x}$ 满足下面条件时，称 $\boldsymbol{x}$ 为博奕 Γ_n 的**平衡点**。

条件(i)：

$$M_i(\boldsymbol{x})=\max_{y^{(i)}\in S^{(i)}} M_i(\boldsymbol{x};\ y^{(i)}) \quad (i=1,\ \cdots,\ n). \tag{13.1}$$

即在策略組 $\boldsymbol{x}=(x^{(1)},\ \cdots,\ x^{(n)})$ 中，局中人 i 以外的局中人，保持策略 $x^{(1)},\ \cdots,\ x^{(i-1)},\ x^{(i+1)},\ \cdots,\ x^{(n)}$ 不变，仅局中人 i 将策略 $x^{(i)}$ 改为其他策略时，对于他并不有利。这是因为，$\boldsymbol{x}$ 称为平衡点是对所有局中人 $i=1,\ \cdots,\ n$ 来說的。在 2 人零和博奕中所定义的平衡点(定义 9.3)，显然是定义 13.1 的特殊情况。

在策略 $x^{(i)}=\sum x_j^{(i)}\alpha_j^{(i)}$ 中，当 $x_j^{(i)}>0$ 时，就說策略 $x^{(i)}$ 使用純策略 $\alpha_j^{(i)}$。在策略組 $\boldsymbol{x}=(x^{(1)},\ \cdots,\ x^{(n)})$ 中，如果 $x^{(i)}$ 使用 $\alpha_j^{(i)}$，則說 $\boldsymbol{x}$ 使用 $\alpha_j^{(i)}$。

若策略組为 $\boldsymbol{x}=(x^{(1)},\ \cdots,\ x^{(n)})$，当 $x^{(i)}=\sum x_j^{(i)}\alpha_j^{(i)}$ 时，$M_i(\boldsymbol{x})$ 关于各分量 $x^{(i)}$ 是綫性的。即 $M_i(\boldsymbol{x})$ 为

$$M_i(\boldsymbol{x})=\sum_j x_j^{(i)}M_i(\boldsymbol{x};\ \alpha_j^{(i)}). \tag{13.2}$$

从而下面等式成立：

$$\max_{y^{(i)}\in S^{(i)}} M_i(\boldsymbol{x};\ y^{(i)})=\max_j M_i(\boldsymbol{x};\ \alpha_j^{(i)}). \tag{13.3}$$

所以 $\boldsymbol{x}$ 为平衡点的充要条件是下面的条件(ii)成立。

条件(ii)：

$$M_i(\boldsymbol{x})=\max_j M_i(\boldsymbol{x};\ \alpha_j^{(i)}) \quad (i=1,\ \cdots,\ n). \tag{13.4}$$

再根据(13.2)的关系式，(13.4)的成立与下列事实等价，即使

$$M_i(\boldsymbol{x};\ \alpha_j^{(i)})<\max_k M_i(\boldsymbol{x};\ \alpha_k^{(i)})$$

成立的策略 $\alpha_j^{(i)}$，为 $x_j^{(i)}=0$。所以 $\boldsymbol{x}$ 是平衡点的充要条件也就是下面的条件(iii)。

条件(iii)：若在 $\boldsymbol{x}$ 中使用純策略 $\alpha_j^{(i)}$，則恒有

$$M_i(\boldsymbol{x};\ \alpha_j^{(i)})=\max_k M_i(\boldsymbol{x};\ \alpha_k^{(i)}) \quad (i=1,\ \cdots,\ n). \tag{13.5}$$

但在非合作 n 人博奕中，是否总存在有平衡点呢？为了証明存在定理，引用下面的不动点定理。

輔助定理 13.1❶ (Brouwer 不动点定理) 設 S 为 Euclid 空間的有界閉凸集合。如果从 S 到 S 的点对点映照 T 連續，則至少存在一个不动点。卽至少存在一个点 $x_0 \in S$，使 $x_0 = T(x_0)$。

为了以后的需要，这里也将 Brouwer 定理的扩張定理（角谷不动点定理）提出。設集合 S 的閉凸子集合全体的集为 $\mathfrak{R}(S)$。这时从 S 到 $\mathfrak{R}(S)$ 的点对集合映照 $\Phi: S \ni x \to \Phi(x) \in \mathfrak{R}(S)$ 中，若当 $x_n \to x_0$，$y_n \in \Phi(x_n)$ 且 $y_n \to y_0$ 时，有 $y_0 \in \Phi(x_0)$，則称映照 Φ 为**上半連續** (upper semicontinuous)。

輔助定理 13.2❷ (角谷不动点定理) 設 S 是 Euclid 空間的有界閉凸集合，这时若从 S 到 $\mathfrak{R}(S)$ 的点对集合映照 Φ 上半連續，則至少存在一个点 $x_0 \in S$，使 $x_0 \in \Phi(x_0)$。

用上面的輔助定理，来証明下面非合作 n 人博奕的基本定理。

定理 13.1 非合作 n 人(有限)博奕，至少存在一个平衡点。

証明 用下式定义局中人 $1, 2, \cdots, n$ 的策略組 $\boldsymbol{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)})$ 的連續函数 φ_{ij}：

$$\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}) = \max[0, M_i(\boldsymbol{x}; \alpha_j^{(i)}) - M_i(\boldsymbol{x})]. \qquad (13.6)$$

然后用这个函数，将为 $\boldsymbol{x}$ 分量的局中人 i 的策略 $x^{(i)} = \sum_j x_j^{(i)} \alpha_j^{(i)}$ 变換成下面式子定义的局中人 i 的策略 $y^{(i)}$：

$$y^{(i)} = \sum_j \frac{x_j^{(i)} + \varphi_{ij}(\boldsymbol{x})}{1 + \sum_k \varphi_{ik}(\boldsymbol{x})} \alpha_j^{(i)} \quad (i = 1, \cdots, n). \qquad (13.7)$$

显然 $y^{(i)}$ 是局中人 i 的混合策略。这样变換后的策略組用 $\boldsymbol{y} = (y^{(1)}, \cdots, y^{(n)})$ 表示。設 T 为 $\boldsymbol{x}$ 对应于 $\boldsymbol{y}$ 的映照（从 Δ 到 Δ 的点对点映照），卽 $T: \Delta \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} \in \Delta$。由于集合 Δ 是有界閉凸集合，且映照 T 是連續的，所以根据輔助定理 13.1，映照 T 中至少存在一个不

---

❶ 証明可参考 Hurewicz, Witold and Wallman, Dimension Theory (Princeton University Press, 1948).

❷ 参考 Kakutani, A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Mathematical Journal, 8 (1941).

动点。如果能够証明这个不动点就是平衡点，則定理就得到了証明。現在設存在的不动点为 $\boldsymbol{x}=(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})$，$x^{(i)}=\sum\limits_j x_j^{(i)}\alpha_j^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 可是策略 $x^{(i)}$ 仅使用純策略 $\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_{m_i}^{(i)}$ 中的某几个，并設被使用的几个純策略中，对于局中人 i 最不利的一个为 $\alpha_j^{(i)}$. 当然有

$$M_i(\boldsymbol{x};\alpha_j^{(i)})\leqslant M_i(\boldsymbol{x}). \tag{13.8}$$

因而根据函数 φ_{ij} 的定义 (13.6)，这时

$$\varphi_{ij}(\boldsymbol{x})=0. \tag{13.9}$$

可是 $\boldsymbol{x}$ 是映照 T 的不动点，所以 $\boldsymbol{x}=T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$，即 $x^{(i)}=y^{(i)}(i=1,\cdots,n)$. 因此，根据(13.7)，

$$x_j^{(i)}=\frac{x_j^{(i)}+\varphi_{ij}(\boldsymbol{x})}{1+\sum\limits_k\varphi_{ik}(\boldsymbol{x})}\quad\begin{pmatrix}j=1,\cdots,m_i\\ i=1,\cdots,n\end{pmatrix}. \tag{13.10}$$

可是由(13.9)和 $\varphi_{ik}(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，可知(13.10)和

$$\varphi_{ik}(\boldsymbol{x})=0\quad(k=1,\cdots,m_i;\ i=1,\cdots,n) \tag{13.11}$$

是等价的。所以根据函数 φ_{ik} 的定义(13.6)，

$$M_i(\boldsymbol{x})\geqslant M_i(\boldsymbol{x};\alpha_k^{(i)})\quad(k=1,\cdots,m_i;\ i=1,\cdots,n). \tag{13.12}$$

从而
$$M_i(\boldsymbol{x})=\max_k M_i(\boldsymbol{x};\alpha_k^{(i)})\quad(i=1,\cdots,n).$$

也就是对于不动点 $\boldsymbol{x}$，成立着为平衡点的充要条件 (ii). 所以不动点 $\boldsymbol{x}$ 是平衡点，于是博奕中的平衡点存在。 証毕

2 人零和 (有限) 博奕恒存在平衡点是这个定理 13.1 的特殊情况。因而，定理 13.1 包含了定理 10.1. 需注意的是定理 13.1 的証明引用了不动点定理，而定理 10.1 的証明沒有引用此定理。

現在我們看一下对非合作 n 人博奕，試用已經保証存在的平衡点直接定义为博奕 Γ_n 的解是否合理。事实上，在 2 人零和博奕的情况，以平衡点定义为博奕的解是我們所同意的，其所以被同意，是因为它具有定理 10.2 中所說的平衡点的特性。可是对一般的非合作 n 人博奕的平衡点是否也具有类似的性质呢？由下面的

說明可以看到,如果去掉了零和的条件,即使是在 2 人博奕的情况下,也会出現許多困难的問題。

同 2 人零和博奕时一样,設局中人 1, 2 的純策略全体的集合分别为 $A=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, $B=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$,局中人 1, 2 取純策略 α_i, β_j 时,局的結果 ω 的集合 Ω 上的概率分布为 π_{ij},相应于这个概率分布的局中人 1, 2 的贏得,分别为 $M_1(\alpha_i, \beta_j)=a_{ij}$, $M_2(\alpha_i, \beta_j)=b_{ij}$. 可是本章所考察的博奕中,两个局中人不是严格对抗的,所以就不能象零和博奕那样来处理。

在 2 人博奕中,若是至少存在一組概率分布 π_{ij} 和 π_{hk},第一个局中人取 π_{ij} 比取 π_{hk} 好,可是另外一个局中人取 π_{hk} 不比取 π_{ij} 好,这样的 2 人博奕称为**非严格对抗的**(non-strictly competitive)。这时,各局中人效用的原点和单位,不論如何取,都不能使等式

$$M_1(\alpha_i, \beta_j)+M_2(\alpha_i, \beta_j)=0 \quad (i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n)$$

成立。严格对抗的博奕可以作为零和博奕来处理,但对非严格对抗的博奕,这是不可能的。以后我們将非严格对抗的博奕和**非零和博奕**(non-zero-sum game)作为同义辞使用。本节就是研究非合作 2 人非零和博奕,这样的博奕可用表 13.1 表示。

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} \begin{array}{c} \beta_1 \qquad\quad \cdots \qquad\quad \beta_j \qquad\quad \cdots \qquad\quad \beta_n \\ \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & \cdots & (a_{1j}, b_{1j}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{i1}, b_{i1}) & \cdots & (a_{ij}, b_{ij}) & \cdots & (a_{in}, b_{in}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & \cdots & (a_{mj}, b_{mj}) & \cdots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix} \end{array}$$

表 13.1

当局中人 1, 2 分别取混合策略 $x=(x_1, \cdots, x_m)\in S_m^{(1)}$, $y=(y_1, \cdots, y_n)\in S_n^{(2)}$ 时,局中人 1, 2 的贏得 $M_1(x, y)$, $M_2(x, y)$ 分别由下面式子給出:

$$M_1(x, y)=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j, \quad M_2(x, y)=\sum_i\sum_j b_{ij}x_iy_j. \tag{13.13}$$

現在在以 u_1 軸为水平軸, u_2 軸为鉛直軸的坐标平面(称为**U 平面**)

上，取坐标为 $u_1=M_1(x, y)$，$u_2=M_2(x, y)$ 的点 $\boldsymbol{P}$，称为对应策略組 (x, y) 的**效用点**。当 x，y 分别在 $S_m^{(1)}$，$S_n^{(2)}$ 内独立移动时，效用点全体所成的集合为 V. V 是 U 平面上的一个有界閉集合，称为非合作博奕的**效用集合**。局中人 1，2 的任意策略組 (x, y) 都对应着 V 的一点，反之，V 的点至少有一組策略組 (x, y) 和它对应。要評价非合作 2 人博奕中局中人 1，2 取策略 x，y 时，它在整个博奕中的作用，可以从对应于策略 (x, y) 的效用点 P 在效用集合 V 上的位置关系来判断。

我們的問題是要研究在非合作 2 人非零和博奕中，各局中人的最优策略。

例 13.1 考察由表 13.2 給定的非合作 2 人非零和博奕。当局中人 1，2 分别取混合策略 $x\alpha_1+(1-x)\alpha_2$，$y\beta_1+(1-y)\beta_2$ $(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$ 时，各局中人的贏得 $u_1(x, y)$，$u_2(x, y)$ 分别为

$$u_1(x, y)=5xy-2(x+y)+1, \quad u_2(x, y)=5xy-3(x+y)+2.$$

这博奕的平衡点是 (α_1, β_1)，(α_2, β_2) 和 $\left(\frac{3}{5}\alpha_1+\frac{2}{5}\alpha_2, \frac{2}{5}\beta_1+\frac{3}{5}\beta_2\right)$（記为 (x^0, y^0)），容易知道，除此以外再不存在其他的平衡点。而在这些平衡点上各局中人的贏得如下：

$$M_1(\alpha_1, \beta_1)=2, \quad M_1(\alpha_2, \beta_2)=1, \quad M_1(x^0, y^0)=1/5,$$

$$M_2(\alpha_1, \beta_1)=1, \quad M_2(\alpha_2, \beta_2)=2, \quad M_2(x^0, y^0)=1/5.$$

但是在这个博奕的平衡点上，局中人 1（或局中人 2）所获的贏得是不相等的（2 人零和博奕时恒相等（定理 10.2））。此外，(α_1, β_1)，(α_2, β_2) 虽然是平衡点，但 (α_1, β_2) 或 (α_2, β_1) 并不是平衡点，即这个博奕的平衡点是不可换的（在 2 人零和博奕时恒可换（定理 10.2））。因而这个博奕虽存在平衡点，但是不容易判断应該用哪一个平衡点来定义博奕的解。

这博奕的效用集合 V，如图 13.1，是由連接 $a(2, 1)$，$c(-1, -1)$ 两点的綫段 ac，以及連接 $b(1, 2)$，$c(-1, -1)$ 两点的綫段 bc，和通过 a，b 两点的抛物綫

$$5u_1^2-10u_1u_2+5u_2^2-2u_1-2u_2+1=0$$

圍成的区域。就效用集合 V 来考虑，局中人 1 期望 u_1 坐标大的效用点，局中

人2期望u_2坐标大的效用点。从图13.1直观来看，在V中使两个局中人都满足的效用点是不存在的。

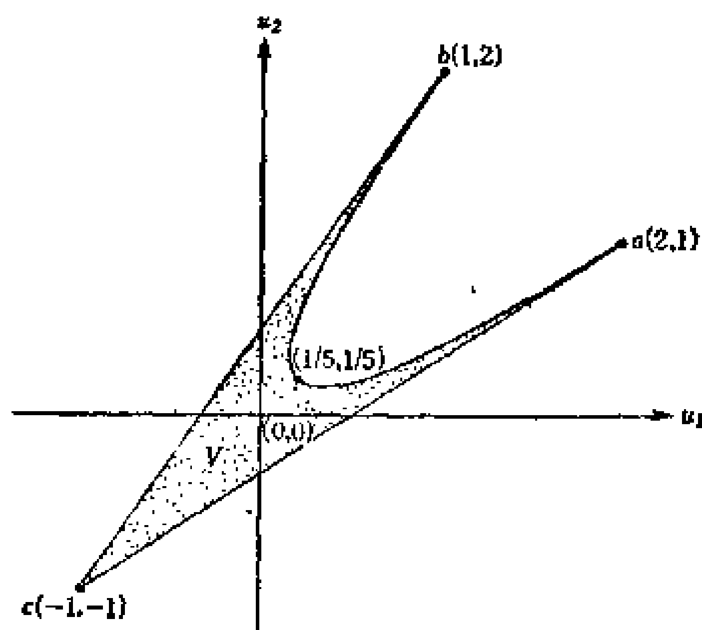


图　13.1

	β_1	β_2
α_1	(2, 1)	(−1, −1)
α_2	(−1, −1)	(1, 2)

表　13.2

	β_1	β_2
α_1	(0.9, 0.9)	(0, 1)
α_2	(1, 0)	(0.1, 0.1)

表　13.3

例13.2　考察由表13.3給定的非合作2人非零和博奕。由局中人1的立場来看，不論局中人2取β_1或取β_2，α_2总比α_1有利。由局中人2的立場来看，不論局中人1取α_1或α_2，β_2总比β_1有利。因而在这局博奕中，局中人1，2分別取α_2，β_2，应該是合理的。同时(α_2, β_2)是这个博奕唯一的平衡点，并且α_2，β_2分別是局中人1，2的唯一maximin策略。因此，把(α_2, β_2)解釋为博奕的解应該是合适的。当然，若允許局中人事先相互协商，則博奕也可能不終止在(α_2, β_2)，而終止在对两个局中人都有利的(α_1, β_1)，但我們現在所考慮的是非合作博奕。此外，虽然是非合作博奕，若博奕不限定进行一局，而可以反复进行，則由于局中人完全知道表13.3，所以在反复进行过程中，可以想象两个局中人完全有可能默然同意不取(α_2, β_2)，而終局于(α_1, β_1)。

如上所述，在非零和博奕中会出現有各种各样問題，可是关于非合作n人博奕的解，Nash[5]采取了下面的定义：

定义13.2　設非合作n人博奕的平衡点全体的集合为Q，若$(\boldsymbol{y}; z_i)\in Q$，且$\boldsymbol{x}\in Q$时，$(\boldsymbol{x}; z_i)\in Q$对于所有的$i=1, 2, \cdots, n$都成立（即平衡点可交换），則称博奕$\Gamma_n$为**可解**。可解博奕$\Gamma_n$的**解**是平衡点的集合$Q$。

在例 13.1 中所看到的，两个不同的平衡点对各局中人給出的贏得不一定相同，所以关于可解博奕的解定义如下：

$$v_i^+ = \max_{x \in Q} M_i(x), \quad v_i^- = \min_{x \in Q} M_i(x) \quad (i=1, \cdots, n).$$

v_i^+ 称为博奕 Γ_n 給局中人 i 的**上方值** (upper value)，v_i^- 称为博奕 Γ_n 給局中人 i 的**下方值** (lower value)。特别当 $v_i^+ = v_i^-$ (設 $= v_i$) 时，v_i 称为博奕 Γ_n 給局中人 i 的**值**。

根据定义 13.2，因为例 13.1 的博奕的平衡点不可换，所以这个博奕不可解。例 13.2 的博奕，仅有一个平衡点，所以博奕可解。而 (α_2, β_2) 是这个博奕的解，它給局中人 1 的值是 0.1，給局中人 2 的值也是 0.1. 此外，根据定理 10.2，2 人零和博奕在定义 13.2 的意义下是可解的，而且存在着分别給各局中人 1，2 的值。

§14 合作2人博奕

再来考虑前节例 13.1 的博奕。但现在不作为非合作博奕，而在局开始前，两个局中人为了求得相互的利益，允許进行协商(即所謂合作博奕)。两人协商的結果，商妥用同等的机会采用 (α_1, β_1) 和 (α_2, β_2)，并且商定用投擲錢币的办法作为解决这个博奕的一种方案，商定出現正面时局中人 1，2 分别取 α_1, β_1，出現反面时分别取 α_2, β_2. 这时局中人 1，2 的贏得是 3/2，3/2. 而这个效用点 (3/2, 3/2) 不包含在非合作博奕的效用集合 V 内。也就是合作博奕可以达到对两人都有利的效用点，但这个点在各局中人独立选定策略的非合作博奕中是不能达到的。很明显，在这个合作博奕的效用集合 R 的内部包含 V 的 $\triangle abc$. 而效用点 $m(3/2, 3/2)$ 是边 ab 的中点(图 14.1)。

一般，若局中人 1，2 的純策略全体的集合分别为 $A=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$，$B=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$，允許在局开始前根据两人的协商用概率 z_{ij} (在此 $z_{ij} \geq 0$，$i=1, \cdots, m$；$j=1, \cdots, n$，$\sum_i \sum_j z_{ij}=1$) 取策略組

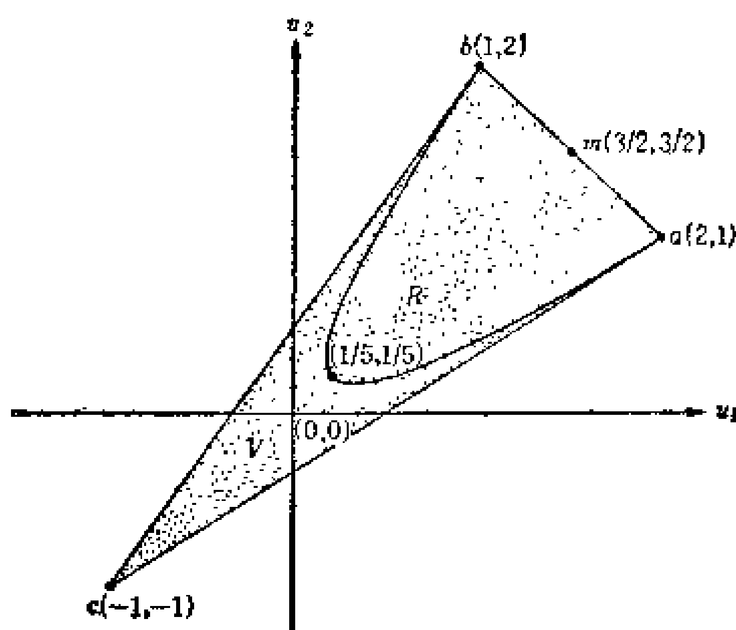


图 14.1

(α_i, β_j) $(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n)$ 的博奕称为**合作2人博奕**(cooperative two-person game)。而这样的方案，也就是用概率 z_{ij} 取純策略組(α_i, β_j)的方案，換言之，純策略組(α_i, β_j) $(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n)$ 上的概率分布 $z=\{z_{ij}\}$，$z_{ij}\geqslant 0$，$\sum\sum z_{ij}=1$，称为局中人1，2的**結合混合策略**(joint-mixed strategy)。因而允許結合混合策略的博奕是合作博奕。結合混合策略 $z=\{z_{ij}\}$ 全体的集合和 $[(m\times n)-1]$ 維单純形 $S_{m\times n}$ 的点是一一对应的。

使用結合混合策略 $z=\{z_{ij}\}$ 时，局中人 1，2 的赢得 $M_1(z)$，$M_2(z)$，分别由下式給出：

$$\begin{aligned} M_1(z) &= \sum_i \sum_j M_1(\alpha_i, \beta_j) z_{ij} = \sum_i \sum_j a_{ij} z_{ij}, \\ M_2(z) &= \sum_i \sum_j M_2(\alpha_i, \beta_j) z_{ij} = \sum_i \sum_j b_{ij} z_{ij}. \end{aligned} \tag{14.1}$$

使这些值 $M_1(z)$，$M_2(z)$ 对应于具有 u_1 坐标，u_2 坐标的 U 平面上的点(对应結合混合策略 z 的效用点)，这些点的集合称为合作2人博奕的**效用集合**，用 R 表示。局中人1，2各自独立地取混合策略 $x=(x_1, \cdots, x_m)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$ 和用 $z_{ij}=x_i y_j$ 的特別的結合混合

策略 $z=\{z_{ij}\}$ 是等价的。因而 $R\supset V$. 而效用集合 R 是 U 平面上的 $m\times n$ 个点 $(M_1(\alpha_i, \beta_j), M_2(\alpha_i, \beta_j))$, $i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,n$ 組成的集合，从而很明显地是 V 的凸集。因而合作2人博奕的效用集合 R 构成如图14.2的(閉)凸多边形。我們的問題是研究效用集合 R 中的哪一个点是合作2人博奕的解点。

对于 R 中的不同两点 (u_1', u_2'), (u_1'', u_2''), 若 $u_1'\geqslant u_1''$, 且 $u_2'\geqslant u_2''$, 则称效用点 (u_1', u_2') **优越**于 (dominate) 效用点 (u_1'', u_2''). 若 R 的其他点 (u_1, u_2) 都优越于 R 的点 (u_1', u_2'), 則效用点 (u_1', u_2') 成为两个局中人都不值得考虑的点(因为这时可实現比 (u_1', u_2') 对两人更有利的效用点 (u_1, u_2)), 从而在合作2人博奕时，两局中人所关心的是 R 中不被其他点优越的点。这种效用点全体的集合称为效用集合 R 的 (或者合作2人博奕的) **結合最大效用集合** (joint maximal set)。图14.2中折綫 $abcd$ 构成結合最大效用集合。

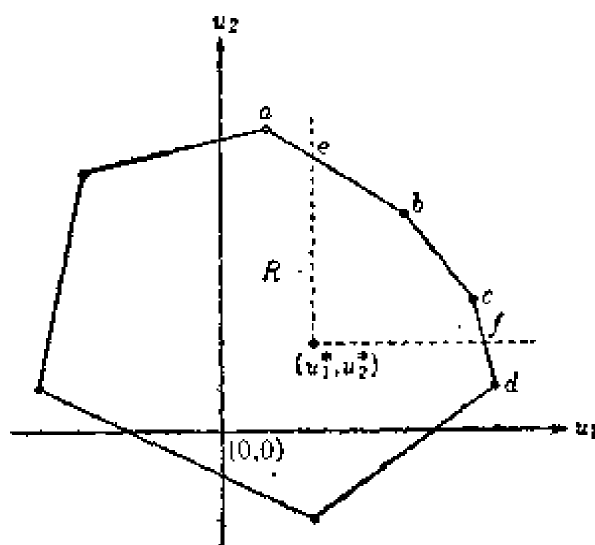


图 14.2

就在这个結合最大效用集合的点中，局中人1最希望的是 u_1 坐标最大的点 d, 局中人2最希望的是 u_2 坐标最大的点 a. 然而在这个結合最大效用集合上，两个局中人的利害是完全相反的，也就是在这个結合最大效用集合上的点，要增加 u_1 坐标，则就减小 u_2 坐标，要增加 u_2 坐标，则就减小 u_1 坐标。这样，在結合最大效用集合中，到底哪些点能为两人都同意呢？

現在考虑各局中人在沒有合作下单独进行的情况。局中人1[2] 取 maximin 策略所得的安全水准(因而是局中人1[2] 的最

大安全水准)設为 $u_1^*[u_2^*]$. 这样,局中人 1[2] 用 maximin 策略,至少可以确保效用 $u_1^*[u_2^*]$. 因而,局中人 1[2] 在效用点 $u_1<u_1^*[u_2<u_2^*]$ 終局,这是不需要合作的。所以通过效用点 (u_1^*, u_2^*) 的水平綫和垂直綫之間的結合最大效用集合的部分称为**协調效用集合**(negotiation set),这部分是两局中人关心的对象。图 14.2 中折綫 $ebcf$ 构成协調效用集合。

現在的問題是,协調效用集合中的哪些点,可以看作是合作博奕的解点。

将例 13.1 的博奕考慮为合作博奕时,$u_1^*=1/5$, $u_2^*=1/5$, 所以綫段 ab 是这个博奕的协調效用集合。直观上我們可以将綫段 ab 的中点 (3/2, 3/2) 认为是这个合作博奕的解点(参看图14.1)。

一般的所謂合作 2 人博奕,便是給定了效用集合 R 和有两局中人的最大安全水准的效用点 (u_1^*, u_2^*),所以可将合作 2 人博奕表示为 $[R, (u_1^*, u_2^*)]$. 将局中人 1, 2 的效用 u_1, u_2 作綫性变换,变换为效用 u_1', u_2' 时(参看定理 4.1),取水平軸为 u_1' 軸,垂直軸为 u_2' 軸的坐标平面叫作 U' 平面。U 平面的效用集合 R 和点 (u_1^*, u_2^*) 在 U' 平面上分别为集合 R' 和点 (v_1^*, v_2^*) 时,在 U' 平面上的合作博奕 $[R', (v_1^*, v_2^*)]$ 叫做将各局中人的效用,实行正一次变換后的表現。此外,假定效用集合中存在使 $u_1>u_1^*$, 且 $u_2>u_2^*$ 的点 (u_1, u_2). 我們希望在协調效用集合中确定出合作 2 人博奕解点的位置。为此,必須通过要求滿足的条件,定义合作 2 人博奕的解。現在对合作 2 人博奕 $[R, (u_1^*, u_2^*)]$, 使它和 R 的点对应的規則用 F 表示,并記对应的点为 $F[R, (u_1^*, u_2^*)]$.

定义 14.1　滿足下面条件 (i) ~ (iv) 的 R 的点 $(u_1^0, u_2^0) = F[R, (u_1^*, u_2^*)]$, 称为在 Nash 意义下合作 2 人博奕 $[R, (u_1^*, u_2^*)]$ 的解点。

条件(i): 設在合作 2 人博奕 $[R, (u_1^*, u_2^*)]$ 中,将各局中人的

效用作正一次变换后的博奕表现为$[R', (v_1^*, v_2^*)]$. 则 $F[R, (u_1^*, u_2^*)]$ 和 $F[R', (v_1^*, v_2^*)]$ 也由同样的正一次变换联系着。

条件(ii)：$F[R, (u_1^*, u_2^*)]=(u_1^0, u_2^0)$，则

1) $u_1^0 \geqslant u_1^*$, $u_2^0 \geqslant u_2^*$,

2) R 中不存在优越于(u_1^0, u_2^0)的点。

条件(iii)：两个合作 2 人博奕$[R, (u_1^*, u_2^*)]$和$[R', (u_1^*, u_2^*)]$，若

1) $R \subset R'$,

2) $F[R', (u_1^*, u_2^*)] \in R$,

则
$$F[R, (u_1^*, u_2^*)]=F[R', (u_1^*, u_2^*)].$$

条件(iv)：如果合作 2 人博奕$[R, (u_1^*, u_2^*)]$满足下面条件：

1) $u_1^*=u_2^*$,

2) 若 $(u, v) \in R$, 则 $(v, u) \in R$,

3) $F[R, (u_1^*, u_2^*)]=(u_1^0, u_2^0)$,

则
$$u_1^0=u_2^0.$$

条件(iii)的意义如下。在两个合作博奕中，若各局中人的最大安全水准是相同的，且一个博奕的效用集合包含另一个博奕的效用集合，这时若具有较大效用集合的博奕解点，在有较小效用集合的博奕中，也是可能达到的效用点时，则有較小效用集合的博奕解点和这点是一致的。

条件(iv)的意义如下。若合作 2 人博奕中，由效用的适当正一次变换，使各局中人的位置成为对称，则在效用的测度上，解所給出的两个局中人的期望效用是相等的。

当我們在定义 14.1 的意义下，討論合作 2 人博奕$[R, (u_1^*, u_2^*)]$的解点存在和构成时，可以变换各局中人的效用，使 u_1^*, u_2^* 成为 0，因而不失一般性，可以合作 2 人博奕$[R, (0, 0)]$为討論对象。

定理 14.1 合作 2 人博奕$[R, (0, 0)]$的解点是 U 平面第一象限上效用集合 R 中，使积 u_1u_2 为最大的点(u_1^0, u_2^0). (我們假定存在使 $u_1>0$, $u_2>0$ 的 R 的点(u_1, u_2). 于是 R 是有界闭凸集合，

所以满足本定理条件的点(u_1^0, u_2^0)只存在一个。)

証明　变换各局中人的效用，使得满足定理条件的唯一点(u_1^0, u_2^0)变换为点$(1, 1)$．根据这个变换，集合R变换为坐标平面U'上的集合R'．因为在这个效用的变换里各局中人的效用都乘上了正数，所以R'仍然是有界閉凸集合。于是U'平面上的点$(1, 1)$是U'平面的第一象限上R'的点(u_1, u_2)中，使积u_1u_2为最大的点。我們要証明这个点就是合作2人博奕$[R', (0, 0)]$的解点。为此先証明对于R'的任意点(u_1, u_2)，必有

$$u_1+u_2\leqslant 2. \tag{14.2}$$

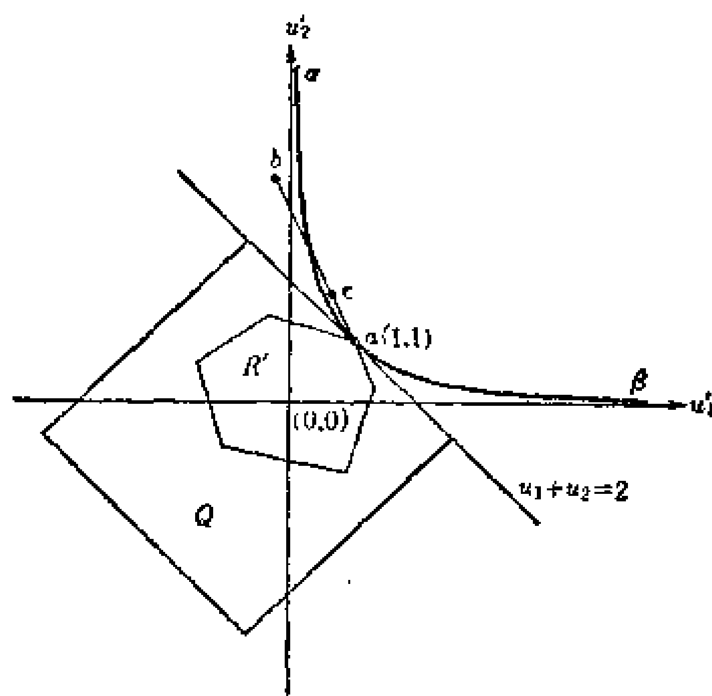


图　14.3

现在設存在R'的点$b=(u_1, u_2)$，使$u_1+u_2>2$，于是点b在直綫$u_1+u_2=2$的右上方，因而在連接点$a=(1, 1)$和点b的綫段ab上，存在包含于双曲綫$u_1u_2=1$的第一象限分支$\alpha\beta$内部的点$c=(u_1', u_2')$．就这一点$c(u_1', u_2')$来看，$u_1'u_2'>1$．另一方面，a，$b\in R'$，R'是凸集合，所以$c\in R'$．这和点$a=(1, 1)$的上述性质矛盾。所以(14.2)成立。換言之，直綫$u_1+u_2=2$ (是双曲綫$\alpha\beta$在

点 $a(1, 1)$ 处的切綫)即为有界閉凸集合 R' 的支持綫(supporting line)。因而,存在有半平面 $u_1+u_2\leq 2$ 上的正方形 Q, 其一边落在直綫 $u_1+u_2=2$ 上,关于直綫 $u_1=u_2$ 对称,且其内部完全包含 R'。于是考虑以正方形 Q 为效用集合的合作2人博奕 $[Q, (0, 0)]$。根据条件(iv)和条件(ii),博奕 $[Q, (0, 0)]$ 的解点由点 $a=(1, 1)$ 給出。而且 $a\in R'$。所以由条件(iii),点 $a=(1, 1)$ 又是博奕 $[R', (0, 0)]$ 的解点。从而根据条件(i)知道,原来合作博奕 $[R, (0, 0)]$ 的解点是滿足定理条件的唯一点。 証畢

将这个定理14.1用于作为合作博奕的例13.1上, Nash 意义的解不外是我們以前由直观得出的解 $(3/2, 3/2)$。

§15 交涉2人博奕

現在我們考虑对两个行动主体,相互間进行着討价还价的对抗如何构造为博奕模型的問題。在所要构成的博奕中,两个局中人 1, 2 可选取的純策略集合分别为 $A=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, $B=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$, 并把局中人 1, 2 取純策略 α_i, β_j 时的期望效用,和以前一样記作 $M_1(\alpha_i, \beta_j)$, $M_2(\alpha_i, \beta_j)$。在博奕 Γ 中,允許在一局开始前,經过磋商,然后結合着使用任意的結合混合策略 $z=\{z_{ij}\}$。($z_{ij}\geqq 0$, $\sum\sum z_{ij}=1$.)对应于所有結合混合策略 $z\in S_{m\times n}$ 的 U 平面上效用点的全体(效用集合),和以前同样,用 R 表示。这里所考虑的博奕 Γ, 与上节合作2人博奕不同之处是各局中人可以相互威胁(threaten)对方。这里所謂局中人 1[2] 威胁局中人 2[1], 是指局中人 1[2] 作如下的声明:即当自己提出的某要求,若(或因为局中人 2[1] 不合作或者因为博奕的条件)得不到滿足时,自己将使用某一混合策略 $x=(x_1, \cdots, x_m)\in S^{(1)}[y=(y_1, \cdots, y_n)\in S^{(2)}]$。这个作为威胁的策略 $x[y]$,一般对于局中人 1[2] 不一定是所希望的,因而象"威胁"的涵义那样,假定在局中人 j 不答应局中人 i 的

要求时，局中人 i 才被迫使用自己作为"威胁"的策略。

如果作了威胁以后并不付之实行，那就失去了威胁的意义。

另外，将局中人 i 的**要求** (demand) 定义为他至少必须获得效用 d_i。

例如局中人1要求局中人2和自己合作采取結合混合策略 $z=\{z_{ij}\}$，局中人1的要求 d_1 表示为 $d_1=\sum\sum M_1(\alpha_i, \beta_j)z_{ij}$。

設博奕 Γ 經过下面四个阶段終止。

第1阶段：局中人1[2] 选定特定的策略 $x[y]$。这是局中人1[2]对局中人2[1] 表示"威胁"的策略。当局中人1[2] 在自己的要求达不到时，才使用这个策略 $x[y]$。

第2阶段：各局中人将自己取的"威胁"策略告訴对方。

第3阶段：局中人1，2各自独立决定的要求分别为 d_1，d_2。

第4阶段：(1) 若效用集合 R 中，存在 $u_1 \geqslant d_1$ 且 $u_2 \geqslant d_2$ 的点 (u_1, u_2)，使博奕的局終止。这时局中人1，2的赢得分别是 d_1，d_2。

(2) 若效用集合 R 中，不存在(1)中的效用点 (u_1, u_2)，各局中人使用自己选定的"威胁"策略 x，y，使局告終止。这时局中人1，2的赢得分别是 $M_1(x, y)$，$M_2(x, y)$。

这样規定的博奕称为**交涉2人博奕** (negotiation game)。本节的目的是要說明在交涉2人博奕中，各局中人的最优"威胁"策略是什么，最优要求是什么。

在这个交涉博奕 Γ 的四个阶段中，只有第1，3阶段必需由局中人决定，而第2，4阶段是不需要由局中人决定的。因而这个博奕可认为是由下面两个步法組成的。即第一步法局中人1，2分别选定"威胁"的策略 x，y。第二步法是局中人1，2在完全知道第一步法时对方取的策略基础上，各自独立选定要求 d_1，d_2。然后局告終止。

現在設 $u_{1N}=M_1(x, y)$，$u_{2N}=M_2(x, y)$，将 d_1, d_2 的函数 g 定义如下：

$$g(d_1, d_2)=\begin{cases}1 & \text{两人的要求 } d_1, d_2 \text{ 同时达到时，}\\ 0 & \text{其他情况时。}\end{cases} \tag{15.1}$$

这样，經过以上的步法，一局終止时，局中人 i 的贏得 $p_i(x, y; d_1, d_2)$ 由下式給出：

$$p_i(x, y; d_1, d_2)=d_ig+u_{iN}(1-g) \quad (i=1, 2). \tag{15.2}$$

現在在交涉博奕 Γ 中，将第一步法各局中人所取的"威脅"策略 x, y 固定。因而，u_{1N}, u_{2N} 的值固定。于是在这个条件下，博奕 Γ 的进行和局中人1，2各自独立选定要求 d_1, d_2 的一个非合作博奕是相同的。这样考慮的非合作博奕，称为**要求博奕**(demand game)，記为 $DG(N)$。这个 N 是 U 平面上具有坐标 $u_1=u_{1N}$, $u_2=u_{2N}$ 的点，称为"威脅"的点(threat point)。在要求博奕 $DG(N)$ 中，局中人 1，2 取要求 d_1, d_2 时，局中人 i 的贏得 $q_i(d_1, d_2|N)$ 由下式給出：

$$q_i(d_1, d_2|N)=d_ig+u_{iN}(1-g) \quad (i=1, 2). \tag{15.3}$$

于是，为了求交涉博奕 Γ 的解，可按下述进行：首先将一个"威脅"点 N 固定，在由此导出的要求博奕 $DG(N)$ 中，决定各局中人的最优要求 $d_1^0(N)$, $d_2^0(N)$。其次，根据"威脅"点 N 的变动，$d_1^0(N)$, $d_2^0(N)$ 随着变动的情况，推导出原来交涉博奕 Γ 的解。

現在，从决定要求博奕 $DG(N)$ 中，各局中人的最优要求开始。和合作博奕的情况一样，将效用集合 R 的結合最大效用集合的子集合，通过点 N 的水平綫和鉛直綫之間的部分，称为对应点 N 的协調效用集合，表为 $L(N)$。再在 $L(N)$ 内任意点 (d_1, d_2) 中，固定 $d_2[d_1]$ 而变动 $d_1[d_2]$，很明显，此时博奕 $DG(N)$ 的局中人 1[2] 的贏得減少。这是因为这个贏得函数是由 (15.3) 給出的，因而协調效用集合 $L(N)$ 的点都是要求博奕 $DG(N)$ 的平衡点。我們从

这些存在着的无限多的平衡点中，用某种合理的方法，确定一个点，认为是要求博奕 $DG(N)$ 的最优要求点。为此，試将博奕 $DG(N)$ 平滑化。它的意义是博奕 $DG(N)$ 变为由(15.3)給出的赢得函数 $q_i(d_1, d_2|N)$ $(i=1, 2)$，用某个近似的連續函数置换后的博奕。为此，将函数 $g(d_1, d_2)$ 置换为下述那样的連續函数 $h(d_1, d_2)$，即函数 $h(d_1, d_2)$ 是定义在 U 的全平面上，在 R 上取 1，随着点 (d_1, d_2) 离开 R，它的值愈接近 0（但不能为 0）的連續函数。然后，考虑局中人 1, 2 各自独立采取要求 d_1, d_2 时，各局中人 i 的赢得由

$$q_i(d_1, d_2|N, h)=d_ih(d_1, d_2)+u_{iN}(1-h(d_1, d_2)) \quad (i=1, 2) \tag{15.4}$$

給出的博奕。这个博奕用 $DG(N, h)$ 表示，称为要求博奕 $DG(N)$ 經平滑化后的要求博奕。現在从确定这个博奕 $DG(N, h)$ 的最优要求开始。

为此，变换各局中人的效用，使 u_{1N}, u_{2N} 成为 0, 0. 变换后的效用平面为 U'，R 变为 R'. 这样，要求博奕 $DG(N, h)$ 成为在 U' 平面上局中人 1, 2 采取要求 d_1, d_2 时，各局中人 i 的赢得由

$$q_i(d_1, d_2|0, h')=d_ih'(d_1, d_2) \quad (i=1, 2) \tag{15.5}$$

給出的要求博奕 $DG(0, h')$. 当然这时的函数 h' 是定义在 U' 平面上的，在 R' 上取 1，随着点 (d_1, d_2) 离开 R'，它是愈接近 0（但不能为 0）的連續函数。

設在 U' 平面的第一象限中，使积 $d_1d_2h'(d_1, d_2)$ 最大的点为 $P_h=(d_1(h'), d_2(h'))$. 这样，当局中人 2[1] 将要求 $d_2[d_1]$ 保持为 $d_2=d_2(h')[d_1=d_1(h')]$ 时，局中人 1[2] 的赢得 $q_1(d_1, d_2(h')|0, h')[q_2(d_1(h'), d_2|0, h']$ 在 $d_1=d(h')[d_2=d_2(h')]$ 时为最大。即点 P_h 是要求博奕 $DG(0, h')$ 的平衡点。因而点 P_h 也是要求博奕 $DG(N, h)$ 的平衡点。其次，設在 U' 平面的第一象限内，R' 中使

积 u_1u_2 为最大的点（这样的点确实只存在一点）为 $Q_N=(u_1',u_2')$，其最大值为 ρ'。于是，点 Q_N 是 U' 平面上的双曲綫 $u_1u_2=\rho'$ 在第一象限内的分支 $\alpha\beta$ 和有界閉凸集合 R' 的切点。另一方面，由点 P_h 的定义，

$$d_1(h')d_2(h')h'(d_1(h'),\ d_2(h'))\geqslant u_1'u_2'h'(u_1',\ u_2')=u_1'u_2'=\rho',$$

而且 $$0\leqslant h'(d_1(h'),\ d_2(h'))\leqslant 1.$$

所以 $$d_1(h')d_2(h')\geqslant\rho'.$$

因此，点 P_h 在双曲綫 $\alpha\beta$ 的内部。而且随着函数 h 愈接近于函数 g，点 P_h 无限接近于点 Q_N。换言之，不論連續函数 h 如何取法，点 Q_N 是平滑化的博奕 $DG(N,h)$ 的平衡点 P_h 的极限点。根据这种情況，Nash[6] 将点 Q_N 定义为要求博奕 $DG(N)$ 的**解点**，将要求 $d_1=d_1^0(N)$，$d_2=d_2^0(N)$ 定义为要求博奕 $DG(N)$ 的最优要求。在此，$d_1^0(N)$，$d_2^0(N)$ 是点 Q_N 在 U 平面上的坐标。

在以上的討論中，假定了 U' 平面上存在使 $u_1>0$，$u_2>0$ 的 R' 的点 (u_1,u_2)，但是即使不作这样的假定，也可同样地討論。

其次，說明要求博奕 $DG(N)$ 的解点 Q_N 的几何性质。U' 平面的双曲綫 $\alpha\beta$ 是等軸双曲綫，所以通过点 Q_N 的双曲綫的切綫 Q_NT_N 的斜率等于直綫 NQ_N 的斜率（正值）变号后的值。而且切綫 Q_NT_N 是（如同 §14 的合作博奕情况）效用集合 R' 的支持綫。由此，我們得出下面的結論：

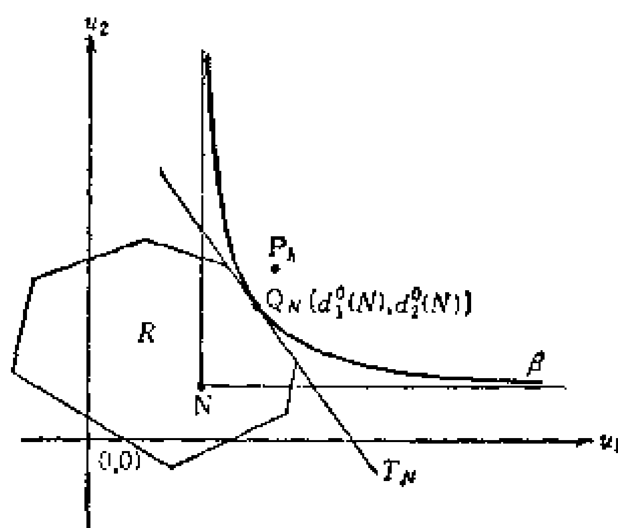


图 15.1

点 Q_N 为 U' 平面第一象限内 R' 的点，若通过此点的 R' 的支持綫的斜率与直綫 NQ_N 的斜率具有相反的符号，则点 Q_N

就是要求博奕 $DG(N)$ 的解点。

現在根据任意要求博奕 $DG(N)$ 的解点 Q_N 的定义和它的唯一存在性，将原来求交涉博奕 Γ 的解的問題归結为求下面規定的博奕 Γ^* 的解的問題。博奕 Γ^* 只由一个步法构成，設在这个步法上局中人 1, 2 选取策略 x, y. 而这时局中人 i 的赢得为 $q_i^*(x, y)$ $(i=1, 2)$，可按下面規則确定：局中人 1, 2 取策略 x, y 时，与此相对应地，在 R 中定出"威胁"的点 $N=(u_{1N}, u_{2N})$（在此 $u_{1N}=M_1(x, y)$, $u_{2N}=M_2(x, y)$）. 由此导出要求博奕 $DG(N)$. 設此要求博奕 $DG(N)$ 的解点为 $Q_N=(u_1^0(N), u_2^0(N))$. 这样，

$$q_i^*(x, y)=u_i^0(N) \quad (i=1, 2). \tag{15.6}$$

此博奕 Γ^* 称为"威胁"博奕。

在求"威胁"博奕 Γ^* 的解之前，要注意下面事項。通过 R 的結合最大效用集合的任意点 Q 的 R 支持綫，唯一定出一条直綫，它也通过点 Q，其斜率和支持綫斜率(負值)符号相反。这条直綫在 R 中的部分(綫段)称为通过 Q 的 R 徑綫。这样，以通过 Q 的徑綫上任意点 N 为"威胁"点的要求博奕 $DG(N)$，都以点 Q 为解点。因而在 R 徑綫上的"威胁"点 N 愈位于上方[下方]时，則要求博奕 $DG(N)$ 愈对局中人 2[1] 有利，而对局中人 1[2] 不利(这是因为結合最大效用集合折綫有負的斜率)。

現在将"威胁"博奕 Γ^* 中局中人 1 的"威胁"策略 $x\in S^{(1)}$ 固定，这时，再作一个使局中人 2 的策略集合 $S^{(2)}$ 中的点 y，对应于 R 的点 N 的映照 T_x，定义如下：

$$T_x: S^{(2)}\ni y\to N=(M_1(x, y), M_2(x, y))\in R.$$

由于函数 $M_1(x, y)$, $M_2(x, y)$ 都是 $y=(y_1, \cdots, y_n)$ 的綫性函数，所以映照 T_x 是由 $S^{(2)}$ 到 R 的綫性变换。根据这个变换 x，設在 $S^{(2)}$ 的 R 中的象上，对于局中人 2 最希望的属于 R 徑綫的部分为 $R(x)$，这样，以 $R(x)$ 的任意点 N 为"威胁"点的要求博奕 $DG(N)$

是(只限于局中人1固定"威胁"策略 x)給出局中人2最有利解点的要求博奕。因而設 $S^{(2)}(x)=T_x^{-1}[R(x)]$，則 $S^{(2)}(x)$ 的任意元素 y 是在"威胁"博奕 Γ^* 上，对应于局中人1的"威胁"策略 x，是局中人2的最优"威胁"策略。由于映照 T_x 是綫性变换，所以 $S^{(2)}(x)$ 是 $S^{(2)}$ 的閉凸子集。完全同样地，在"威胁"博奕 Γ^* 中，当局中人2固定"威胁"策略 y 时，可定出与此相对应的，局中人1的最优"威胁"策略 x 的集合 $S^{(1)}(y)$，它是 $S^{(1)}$ 的閉凸子集。

因此，設由 $S^{(1)}\times S^{(2)}$ 的点 (x, y) 到 $S^{(1)}\times S^{(2)}$ 的有界閉凸子集 $S^{(1)}(y)\times S^{(2)}(x)$ 的点对集合映照为 φ。可見映照 φ 是上半連續的。因此，根据輔助定理13.2，至少存在 $S^{(1)}\times S^{(2)}$ 的点 (x^0, y^0)，使

$$(x^0, y^0)\in S^{(1)}(y^0)\times S^{(2)}(x^0). \tag{15.7}$$

这一結果的意义是：在"威胁"博奕 Γ^* 中，存在局中人1，2的"威胁"策略組 (x^0, y^0)，当局中人1用"威胁"策略 x^0 时，局中人2的最优"威胁"策略是 y^0，而局中人2用"威胁"策略 y^0 时，局中人1的最优"威胁"策略是 x^0。也就是說，博奕 Γ^* 有局中人1，2的策略組 (x^0, y^0)，具下面的性质：

$$q_1^*(x^0, y^0)=\max_x q_1^*(x, y^0), \tag{15.8}$$

$$q_2^*(x^0, y^0)=\max_y q_2^*(x^0, y). \tag{15.9}$$

因而策略組 (x^0, y^0) 是博奕 Γ^* 的平衡点。

此外，要說明一下在博奕 Γ^* 中，策略組 (x^0, y^0) 具有2人零和博奕的解所具有的鞍点性质。为此，考虑博奕 Γ^* 中局中人1，2取 x^0，y^0 时的贏得 $q_1^*(x^0, y^0)$，$q_2^*(x^0, y^0)$。它們是由"威胁"点 $N^0=(M_1(x^0, y^0), M_2(x^0, y^0))$ 导出的要求博奕 $DG(N^0)$ 的解点 Q_{N^0} 的坐标，而且点 Q_{N^0} 属于效用集合 R 的結合最大效用集合。于是結合最大效用集合的折綫有負的斜率。因而其上的点的坐标 u_1，u_2 互为减函数。所以在博奕 Γ^* 中，当局中人1取策略 x^0 时，

局中人2变更策略 y^0，是为了使得局中人1的赢得减少，自己的赢得增加。但是因为 (x^0, y^0) 是平衡点，(15.9)成立，而局中人1已采用了策略 x^0，所以这是不可能的。因此，得到下面的結果：

$$u_1^0(N^0) \equiv q_1^*(x^0, y^0) = \min_y q_1^*(x^0, y). \quad (15.10)$$

同样

$$u_2^0(N^0) \equiv q_2^*(x^0, y^0) = \min_x q_2^*(x, y^0). \quad (15.11)$$

所以根据(15.8)～(15.11)，策略組 (x^0, y^0) 有下面的性质：

$$\begin{aligned} \max_x q_1^*(x, y^0) = q_1^*(x^0, y^0) = u_1^0(N^0) = \min_y q_1^*(x^0, y), \\ \max_y q_2^*(x^0, y) = q_2^*(x^0, y^0) = u_2^0(N^0) = \min_x q_2^*(x, y^0). \end{aligned} \quad (15.12)$$

现在設滿足条件 (15.7) 的点，除 (x^0, y^0) 外还有 $S^{(1)} \times S^{(2)}$ 的点 (x^*, y^*)。这时設

$$q_i^*(x^*, y^*) = u_i^0(N^*) \quad (i=1, 2).$$

則和(15.12)同样，下面等式成立：

$$\begin{aligned} \max_x q_1^*(x, y^*) = q_1^*(x^*, y^*) = u_1^0(N^*) = \min_y q_1^*(x^*, y), \\ \max_y q_2^*(x^*, y) = q_2^*(x^*, y^*) = u_2^0(N^*) = \min_x q_2^*(x, y^*). \end{aligned} \quad (15.13)$$

这时，由 (15.12)，(15.13)，得到

$$u_1^0(N^0) = \min_y q_1^*(x^0, y) \leqslant q_1^*(x^0, y^*) \leqslant \max_x q_1^*(x, y^*) = u_1^0(N^*),$$

即

$$u_1^0(N^0) \leqslant u_1^0(N^*). \quad (15.14)$$

同样可得

$$u_1^0(N^*) \leqslant u_1^0(N^0). \quad (15.15)$$

因而，由 (15.14)，(15.15) 得

$$u_1^0(N^0) = u_1^0(N^*). \quad (15.16)$$

此外，和上面同样有

$$u_2^0(N^0) = u_2^0(N^*), \quad (15.17)$$

这就是說，博奕 Γ^* 即使有多于两个以上的平衡点，而在这些点上各局中人的赢得是相同的。

根据以上的考察，可知在交涉博奕 Γ 中，存在具有下面性质的局中人1，2的"威胁"策略 x^0，y^0 和要求 $d_1=u_1^0$，$d_2=u_2^0$：

(1) 局中人1使用"威胁"策略 x^0，至少可以确保要求 u_1^0。

(2) 局中人2使用"威胁"策略 y^0，至少可以确保要求 u_2^0。

(3) 局中人1，2的"威胁"組 (x^0, y^0) 是对于另外"威胁"的最优"威胁"。也就是 (x^0, y^0) 是博奕 Γ^* 的平衡点。

(4) 若 (x^*, y^*) 是博奕 Γ^* 的另一个平衡点，则 x^* 对于局中人1，和 x^0 一样，可至少确保要求 u_1^0，y^* 对于局中人2，和 y^0 一样，可至少确保要求 u_2^0。

根据这种情况，Nash[6] 将 (u_1^0, u_2^0) 定义为交涉博奕 Γ 的值，将 x^0，y^0 分别定义为博奕 Γ 中局中人1，2的最优"威胁"。至于它們的存在性，由以上的說明已經得到証明了。

参考文献

[1] Blackwell, David, and M. A. Girshick: Theory of Games and Statistical Decisions, John Wiley & Sons, New York, 1954.

[2] Luce, R. Duncan and Howard Raiffa: Games and Decisions, John Wiley & Sons, New York, 1957.

[3] McKinsey, J. C. C.: Introduction to the Theory of Games, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.
(有中譯本,博奕論导引,高鴻勛等譯,人民教育出版社, 1960.)

[4] Nash, John: The Bargaining Problem, Econometrica, 18 (1950).

[5] Nash, John: Non-Cooperative Games, Annals of Mathematics, 54(1951).

[6] Nash, John: Two-Person Cooperative Game, Econometrica, 21 (1953).

[7] von Neumann, John and Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, First edition, 1944; Second edition, 1947.